Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 11

⋆ L'exercice 5 peut être rendu le 18 mai 2017.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 2. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

Exercice 3. Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = 0$.

d) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{C}$, et soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Utiliser les matrices A et B pour montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ est faux en général.

Exercice 5. Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ deux matrices commutatives. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice générale. Montrer que la matrice e^A est non-singulière, et trouver sa matrice inverse.

Exercice 7. On considère le système

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 - 2x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_1 + x_2$$

avec les conditions initiales: $x(0) = \alpha$ et $y(0) = \beta$.

(a) Écrire le système en notation de vecteur matrice comme $X' = AX$ et $X(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

(b) Trouver les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A,

(c) Trouver la matrice S telle que $e^{tA} = Se^{t\Lambda}S^{-1}$, où

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(d) Résoudre l'equation $X(t) = e^{tA}X(0)$ pour trouver une solution du système orignal.

Exercice 8.

a) Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA}, où

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre l'equation $x' = Ax$ avec conditions initiales $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.