Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 11

⋆ L'exercice 8 peut être rendu le 19 mai 2016.

Exercice 1. *a) Pour chaque matrice A, montrer que $\sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$, pour toutes les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.*

b) Pour $1 \leq k \leq r$, montrer qu'il existe une matrice B de rang plus petit ou égal a k telle que $||A-B||_2 \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$.

c) Est-ce que la norme euclidienne du côté gauche de l'inégalité dans (b) peut être remplacée par la norme de Frobenius ?

Exercice 2. *Soient $A, B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.*

Exercice 3. *Utiliser l'exercise 2 pour trouver e^{tA}, pour chacune des matrices suivantes :*

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = 0$.

d) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 4. *Soit $x \in \mathbb{R}$, et soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Utiliser les matrices A et B pour montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ est faux en général.*

Exercice 5. *Soient A, B deux matrices $n \times n$ commutatives, c'est-à-dire $AB = BA$. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Exercice 6. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice générale. Montrer que la matrice e^A est non-singulière, et trouver sa matrice inverse.*

Exercice 7. *a) Trouver la solution générale au système d'équations différentielles suivant :*

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 + 10x_2 \\ x_2' &= -2x_1 + 6x_2 \end{aligned}$$

b) Puis, trouver la solution du système dans (a) qui satisfait les conditions initiales $x_1(0) = 1$ *et* $x_2(0) = 1$.

Exercice 8. *a) Soient* a *et* b *deux nombres réels tels que* $0 < a < b$. *Trouver* e^{tA} *où*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

b) Trouver la solution du système suivant :

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 5x_2 \\ x_2' &= -5x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

sujet aux conditions initiales $x_1(0) = 2$ *et* $x_2(0) = -1$.