Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 10 05 mai 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Démontrer que l'algorithme du simplexe primal termine si le système $Ax \leq b$ de $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leq b\}$ est primal non-dégénéré et montrer que l'algorithme du simplexe est correct.

Indication : En cas de terminaison avec une solution optimale, quelle est la valeur objectif du z^* dual-admissible ?

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Soient T et T' deux bases admissibles voisines l'une de l'autre. Montrer que
– x^*_T et $x^*_{T'}$ sont des sommets de $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$
– que l'enveloppe convexe $conv\{x^*_T, x^*_{T'}\} = \{\lambda x^*_T + (1-\lambda)x^*_{T'} \colon \lambda \in [0,1]\}$ est une face de P

Exercice 3

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ un polyèdre non-vide et primal non-dégénéré. Considérer le graphe G_P défini en cours sur les bases admissibles de P. Soit c un vecteur tel que le PL $\max\{c^T x \colon x \in P\}$ est borné. Soit $y \in V(G_P)$ avec $c^T y < \max\{c^T x \colon x \in P\}$. Montrer que l'on peut trouver une arête $\{y, z\} \in E(G_P)$ telle que $c^T y < c^T z$.

En d'autres termes, pour y une solution de base associée à une base T avec une valeur sous-optimale, démontrer qu'il existe une solution de base z associée à une base voisine T' telle que $c^T y < c^T z$.

Exercice 4

Soient $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}_+$, $x, y \in \mathbb{Q}_+^n$, $A \in \mathbb{Q}_+^{m\times n}$. Montrer que

- $\mathrm{size}(r_1 \cdot \cdots \cdot r_n) \le \mathrm{size}(r_1) + \cdots + \mathrm{size}(r_n)$
- $\mathrm{size}(r_1 + \cdots + r_n) \le 2(\mathrm{size}(r_1) + \cdots + \mathrm{size}(r_n))$
- $\mathrm{size}(x^T y) \le 2(\mathrm{size}(x) + \mathrm{size}(y))$
- $\mathrm{size}(\det A) \le 2\mathrm{size}(A)$

Exercice 5

Démontrer que le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = b\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, est intégral pour tout $b \in \mathbb{Z}^3$.

Indication : La matrice A est-elle TUM ? Trouver un point admissible de P.