Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 10

⋆ L'exercice 4 peut être rendu le 11 mai 2017.

Exercice 1. 1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$

où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Exercice 2. Trouver la solution minimale des systèmes d'équations:

$$x_1 + x_2 = b_1\,, \qquad \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer le Théorème 2.18: Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T A x$ la forme quadratique correspondante à A. Soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} f(x) = \lambda_{\ell+1} = \min_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x\perp u_{\ell+2},\dots,x\perp u_n}} f(x) \tag{1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Exercice 4. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace de dimension 1 $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Exercice 6. a) Pour chaque matrice A, montrer que $\sigma_k \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$, pour toutes les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$.

b) Pour $1 \leq k \leq r$, montrer qu'il existe une matrice B de rang plus petit ou égal a k telle que $||A - B||_2 \leq \frac{||A||_F}{\sqrt{k}}$.

c) Est-ce que la norme euclidienne du côté gauche de l'inégalité dans (b) peut être remplacée par la norme de Frobenius ?

Exercice 7. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$$