Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 10

⋆ Cette semaine, aucun exercice n'est à rendre.

Exercice 1. 1. *Pour les matrices* $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et* $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$*, soit* p_i *la* i*-ème colonne de* P*, et* q_i *la* i*-ème ligne de* Q*. Montrer que*

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

2. *Or, soit* $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ *une matrice avec decomposition en valeurs singulières* $A = P\Sigma Q$*, avec* r *valeurs singulières* $\sigma_1, \dots, \sigma_r$*,* $r \le d$*. Montrer qu'on a*

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i.$$

3. *Conclure que l'on peut représenter* A *comme*

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$

où la matrice U *est composée des premières* r *colonnes de* P*,* V *est composée des premières* r *lignes de* Q*, et* R *est une matrice diagonale avec les* r *valeurs singulières sur sa diagonale.*

Exercice 2. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$*, calculer l'approximation* A_k *de rang* k *de* A*, vue dans le cours, ainsi que*

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$