Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 9

21 avril 2011

Exercice 1

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ un polyèdre. Démontrer que les affirmations suivantes sont équivalentes pour x^* admissible :

i) x^* est un sommet de P.

ii) Il existe un ensemble $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|B| = n$, A_B est inversible et $A_B x^* = b_B$.

iii) Pour tout $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \neq x^* \neq x_2$, on a $x^* \notin \operatorname{conv}\{x_1, x_2\}$.

Exercice 2

Démontrer les affirmations suivantes :

(i) Soit $\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}$ un programme linéaire (admissible et borné) avec un toit optimal B. Le sommet x_B du toit est aussi un sommet du polyèdre $P = \{x \colon Ax \leq b\}$.

(ii) Pour chaque sommet du polyèdre $P = \{x \colon Ax \leq b\}$, il existe un programme linéaire admissible et borné tel que ce sommet est le sommet d'un toit optimal.

Exercice 3

(i) Démontrer : Un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ avec des sommets est intégral si et seulement si chaque sommet est intégral.

(ii) Considérer le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \leq 4,\ x \geq 0\}$. Montrer que ce polyèdre est intégral.

Exercice 4

Considérer le graphe complet G_n avec $n = 3$ sommets, c'est-à-dire $G = (\{1, 2, 3\}, \binom{3}{2})$ et le programme linéaire en nombres entiers de la couverture par sommets. Le polyèdre de sa relaxation linéaire est-il intégral ?

Exercice 5

Il s'agit de démontrer l'indication de l'exercice 3 de la série 8 :
Une matrice telle que chaque colonne contient une composante 1 et une composante -1 au plus et que les autres sont nulles, est totalement unimodulaire. En particulier, la matrice d'incidence d'un graphe orienté est TUM.

Indication : Rappeler la preuve pour la matrice d'incidence d'un graphe (non-orienté et) biparti.

Exercice 6

(i) Donner un tableau des valeurs de la fonction pour $\log n, \sqrt{n}, n, n \log n, n^2, n^3, 2^n$ et $n = 1, 10, 100, 10^3, 10^6$.

(ii) Les affirmations suivantes sont-elles correctes ? Répondre Oui ou Non dans chaque cas.
$n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$ $\quad$ $n + \log n \in \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $\log \log n \in \Theta(n)$ $\quad$ $n^{100} \in \mathcal{O}(1.001^n)$
$n^3 \in \Theta(n^2)$ $\quad$ $n \log n \in \mathcal{O}(n)$ $\quad$ $100n^2 + 1000n \in \Omega(n^2)$

(iii) Trier la liste suivante de sorte que $f_i \in \mathcal{O}(f_j)$ pour $i \leq j$ dans la liste obtenue :

$$n^2 + 10\sqrt{n}, 200 \log n, n^n, \exp^n, n^2 + n^3, 2^n\sqrt{n}, 2 + n, \sqrt{n}, 10^{80}, n^2\sqrt{n}, \sqrt[4]{7n}$$