Prof. Friedrich Eisenbrand 26 avril 2017

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 9

$\star$ L'exercice 5 peut être rendu le 4 mai 2017.

Exercice 1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et soit une SVD de A, i.e. $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices unitaires telles que $A = PDQ$, avec $D \in \mathbb{K}^{m\times n}$ diagonale. Montrer que les matrices A^*, A^*A et AA^* sont de rang r.

Indication: Montrer que A et D ont le même rang et que A^*A et D ont le même rang.

Exercice 2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est définie comme $A^+ = Q^*D^+P^*$, où D^+ est la matrice définie dans la Définition 2.8. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose:

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoniverse:

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que la pseudoinverse satisfait les relations suivantes:

1. $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$.
2. $A = AA^*(A^+)^*$.
3. $A^* = A^*AA^+$.
4. $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.
5. $A = (A^+)^*A^*A$.
6. $A^* = A^+AA^*$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer qu'on a

$$(AA^*)^+ = (A^*)^+ A^+ \,. \tag{1}$$

Utiliser (1) pour montrer

$$A^+ = A^*(AA^*)^+ = (A^*A)^+ A^* \,.$$

Hint: utiliser les résultats de l'exercice 4.

Exercice 6. Calculer la matrice pseudoinverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \,, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Exercice 7. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?