Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 9

⋆ L'exercice 4 peut être rendu le 12 mai 2016.

Exercice 1. *Soit $A \in K^{m\times n}$ avec une decomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. La pseudoinverse de A est défini comme $A^+ = Q^*D^+P^*$, où D^+ est la matrice défini in Definition 3.3. Montrer que A^+ satisfait les quatre conditions de Penrose :*

1. $AA^+A = A$.
2. $A^+AA^+ = A^+$.
3. $(AA^+)^* = AA^+$.
4. $(A^+A)^* = A^+A$.

Exercice 2. *Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer les propriétés suivantes de la matrice pseudoniverse :*

1. $(A^+)^+ = A$.
2. $(A^+)^* = (A^*)^+$.

Exercice 3. *Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que la pseudoinverse satisfait les relations suivantes :*

1. $A^+ = A^+(A^+)^*A^*$.
2. $A = AA^*(A^+)^*$.
3. $A^* = A^*AA^+$.
4. $A^+ = A^*(A^+)^*A^+$.
5. $A = (A^+)^*A^*A$.
6. $A^* = A^+AA^*$.

Exercice 4. *Soit $A \in K^{m\times n}$ avec pseudoinverse A^+. Montrer que en général on a*

$$(AA^*)^+ = (A^*)^+A^+ \,. \tag{1}$$

Donc utiliser (1) *pour montrer*

$$A^+ = A^*(AA^*)^+ = (A^*A)^+A^* \,.$$

Hint : utiliser les résultats de l'exercice 3.

Exercice 5. *Calculer la matrice pseudoinverse des matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. *Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?*

Exercice 7. *Trouver les solutions minimales des ces systèmes d'équations :*

$$x_1 + x_2 = b_1, \qquad \begin{cases} x_1 = b_1, \\ x_1 = b_2, \\ x_1 = b_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 = b_1, \\ 0x_1 = b_2, \\ 7x_3 = b_3, \\ 0x_2 = b_4. \end{cases}$$
