Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

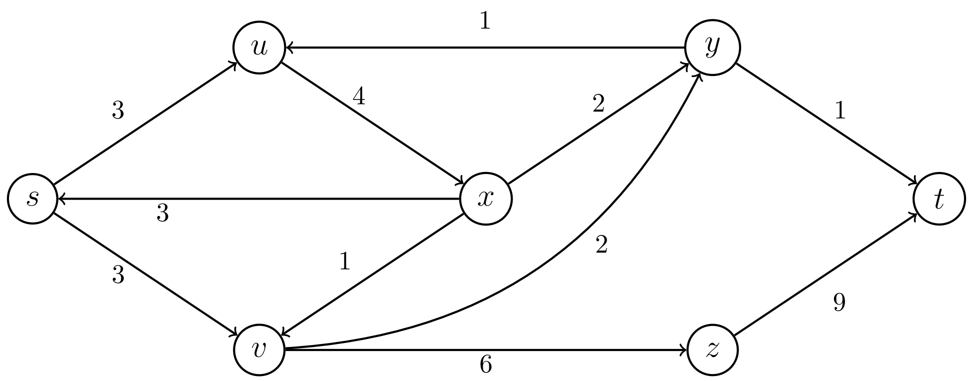
Semestre de printemps 2013

Série 9 2 mai 2013

Remarque générale :
Si vous voulez obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites aux exercices notés, au plus tard le **lundi 13 mai**, avant 12h dans la boîte au bureau MA B1 533.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Considérer le réseau suivant :



Appliquer l'algorithme de Edmonds-Karp (considérer le chemin d'augmentation le plus court) pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin améliorant choisi.
Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Exercice 2 (∗)

Soit (D, u, s, t) un réseau (c-à-d un graphe orienté simple $D = (V, A)$ avec des capacités $u : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et deux sommets $s, t \in V$). En plus, soit $\delta^{out}(U)$ et $\delta^{out}(W)$ deux coupes de capacité minimale de s-t. Démontrer que $\delta^{out}(U \cup W)$ et $\delta^{out}(U \cap W)$ sont également des coupes de capacité minimale de s-t.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver, à l'aide de dualité, le théorème flot-max/coupe-min : Pour un réseau (D, u, s, t), la valeur maximale du flot de s à t est égale à la capacité minimale d'une coupe de s-t.

Soit (D, u, s, t) un réseau. Ajouter un arc artificiel (t, s) avec une capacité très grande $u(t, s) = \sum_{a \in A} u(a)$ et obtenir l'ensemble $A' = A \cup \{(t, s)\}$.
Considérer le PL suivant :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & f_{t,s} \\
\sum_{(i,j) \in A'} f_{i,j} = \sum_{(k,i) \in A'} f_{k,i} \qquad & \forall i \in V \\
0 \leq f_{i,j} \leq u(i,j) \qquad & \forall (i,j) \in A'
\end{aligned}
$$

(i) Trouver le PL dual de ce programme linéaire.

(ii) Démontrer que pour chaque coupe de s-t $\delta^{out}(U)$, il existe une solution admissible du PL dual avec une valeur d'objectif $u(\delta^{out}(U))$.

(iii) Prouver que le PL dual est intégrale, c-à-d tous ses sommets ont des composantes entières.
Indication : Utiliser le fait qu'une matrice TUM (c-à-d totalement unimodulaire) augmentée par une (sous-matrice d'une) matrice d'identité est toujours TUM.

(iv) Démontrer que chaque solution intégrale et optimale du PL dual permet de trouver une coupe de s-t avec capacité égale à la valeur d'objectif. Conclure que la valeur maximale du flot de s à t est égale à la capacité minimale d'une coupe de s-t.

Exercice 4

Donner une manière de trouver un couplage de cardinalité maximale dans un graphe biparti qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$ en utilisant des flots.