Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Semestre de printemps 2013

Série 8 — 18 avril 2013

Remarque générale :
Si vous voulez obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites aux exercices notés, au plus tard le **lundi 29 avril**, avant 12h dans la boîte au bureau MA B1 533.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1
Trouver la forme duale des programmes linéaires suivants :

(i)

$$\begin{array}{rrcl} \max & 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 & & \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 - x_3 & \geq & -15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrcr} \min & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 3 \\ & x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & -5 \\ & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & & \\ & x_4 \leq 0 & & \end{array}$$

Exercice 2
Étant donné le programme linéaire :

$$\begin{array}{rr} \max & x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 22 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 23 \end{array}$$

Démontrer que $(4/3, 10/3)$ est une solution optimale en utilisant le relâchement complémentaire.

Exercice 3 $(*)$
Considérer deux polyèdres $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ et $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Dx \leq d\}$ qui

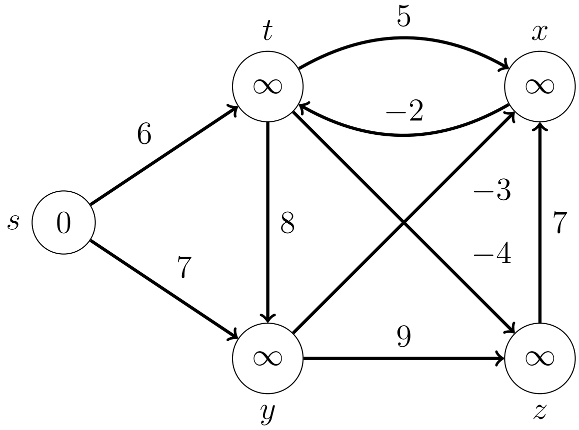
sont non-vides. Nous nous intéressons à trouver si les deux polyèdres ont un point en commun.

(a) Inventer un programme linéaire tel que : Si $P \cap Q$ est non-vide, on donne un point dans $P \cap Q$ (alors le PL à trouver est admissible) ; si $P \cap Q$ est vide, ce PL doit être inadmissible.

(b) Supposons que $P \cap Q$ est vide. Utiliser le dual du PL trouvé en partie (a) pour montrer qu'il existe un vecteur c tel que $c^T x < c^T y$ pour tout $x \in P$ et $y \in Q$.

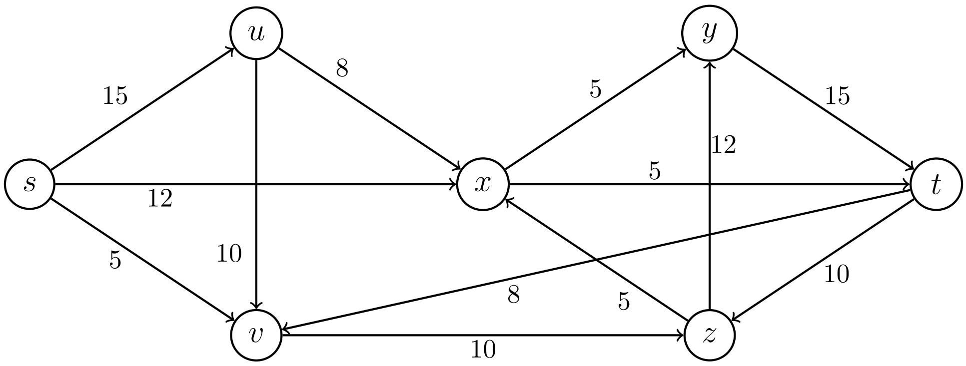
Exercice 4

Considérer le graphe orienté figuré ci-dessous avec des étiquettes de distance. Pour trouver les distances depuis s, exécuter l'algorithme de Bellman-Ford avec la modification vue dans l'exercice 1 de la semaine 6 (c-à-d en repartant les arcs dans deux ensembles A_1 et A_2 pour l'ordre s, z, x, y, t). Dans chaque itération k, indiquer le graphe avec les étiquettes de distance d_k. Pour chaque sommet, marquer l'arc qui atteint le minimum (s'il existe), c-à-d l'arc défini par le prédecesseur.



Exercice 5

Considérer le réseau suivant :

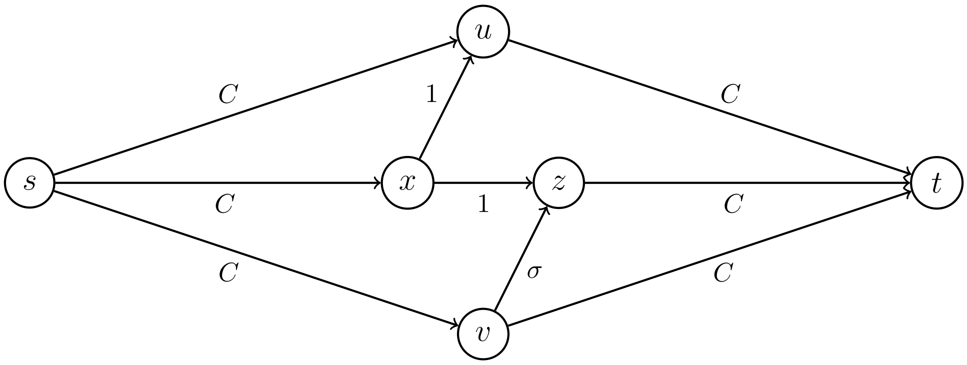


Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin améliorant choisi.

Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Exercice 6

Considérer le réseau suivant, où C est une très grande capacité et $\sigma < 1$ un nombre positif.



Il s'agit de démontrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson ne termine pas pour un certain choix de σ.

- Quel est le flot maximal de s à t ? Quelle est sa valeur ?
- Soit $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Trouver une suite des chemins améliorants qui concourt à un flot de valeur 7 au plus.

Donner tous les chemins améliorants utilisés et les graphes résiduels correspondants.

Indication : Pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$, essayer de revenir toujours à des capacités sous forme $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe résiduel après quelques itérations améliorantes.