Algèbre linéaire avancée II

printemps 2017

Série 8

$\star$ L'exercice 3 peut être rendu le 27 avril 2017.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x).$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Soit $K = \{l_1, \ldots, l_{n-k}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ et soit $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ une sous-matrice symétrique de A définie par $B_{ij} = A_{l_i l_j}$ (ainsi K marque les lignes et les colonnes de A qui apparaissent dans la matrice B.)

Soient $\mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-k}$ les valeurs propres de B. Montrer que $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$, pour $i = 1, \ldots, n-k$.

Exercice 3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang r, et soit une SVD de A, i.e. $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices unitaires telles que $A = PDQ$, avec $D \in \mathbb{K}^{m\times n}$ diagonale. Montrer que les colonnes de Q^* sont les vecteurs propres de A^*A, que celles de P sont les vecteurs propres de AA^*, et que les coefficients diagonaux de D sont les valeurs singulières de A.

Exercice 4. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_7 donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée inversible. Déterminer une décomposition SVD de A^{-1}.
2. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice carrée inversible, alors $|\det(A)|$ est égal au produit des valeurs singulières de A.

3. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique définie positive, alors ses valeurs singulières sont ses valeurs propres.
4. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice carrée symétrique, alors ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non-nulles.

Exercice 6. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice orthogonale, alors la décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Exercice 7. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice symétrique définie positive, alors toute diagonalisation de A en base orthonormée $A = PDP^T$ est une décomposition en valeurs singulières de A.

Exercice 8. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Montrer que si $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ est une matrice unitaire, alors UA admet les mêmes valeurs singulières que A.