**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2016

**Série 8**

$\star$ L'exercice 6 peut être rendu le 28 avril 2016.

---

**Exercice 1.** *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ une matrice de rang $r$, et soit une SVD de $A$, i.e. $U \in \mathbb{K}^{m\times m}$ et $V \in \mathbb{K}^{n\times n}$ des matrices orthogonales telles que $A = U\Sigma V^T$. Montrer que les colonnes de $V$ sont vecteurs propres de $A^TA$, que celles de $U$ sont vecteurs propres de $AA^T$, et que les coefficients diagonaux de $\Sigma$ sont les valeurs singulières de $A$.*

---

**Exercice 2.** *Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices $A_3$, $A_4$, $A_5$, et $A_6$ donner aussi la décomposition en SVD.*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 3.** *Déterminer une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

---

**Exercice 4.**

1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ une matrice carrée inversible. Déterminer une décomposition SVD de $A^{-1}$.*
2. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est une matrice carrée inversible, alors $|\det(A)|$ est égal au produit des valeurs singulières de $A$.*

---

**Exercice 5.** *Montrer qu'une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est semi-définie négative, si et seulement si*

$$(-1)^{|K|}\det(B_K) \geq 0$$

*pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.*

*Rappel : Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $l_1 < l_2 < \cdots < l_k$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $b_{ij} = a_{l_i l_j}, 1 \leq i, j \leq k$.*

**Exercice 6.**

1. *Montrer que si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice carrée symétrique définie positive, alors ses valeurs singulières sont ses valeurs propres.*
2. *Montrer que si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice carrée symétrique, alors ses valeurs singulières sont les valeurs absolues de ses valeurs propres non-nulles.*

---

**Exercice 7.** *Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.*

1. *Si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice orthogonale, alors la décomposition de* $A$ *en valeurs singulières est* $A = AI_nI_n$.
2. *Les valeurs singulières d'une matrice diagonale* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *avec* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *sur la diagonale, sont les valeurs diagonales* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

---

**Exercice 8.** *Montrer que si* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est une matrice symétrique définie positive, alors toute diagonalisation de* $A$ *en base orthonormée* $A = PDP^T$ *est une décomposition en valeurs singulières de* $A$.

---

**Exercice 9.** *Soit* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. *Montrer que si* $P \in \mathbb{K}^{m\times m}$ *est une matrice orthogonale, alors* $PA$ *admet les mêmes valeurs singulières que* $A$.

---

**Exercice 10.** *Soient* $p_1, \ldots, p_m$ *des points de* $\mathbb{R}^n$. *Trouver le sous-espace* $U$ *de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* 1 *tel que la somme* $\sum_{i=1}^m dist(p_i, U)^2$ *est minimale.*

---

**Exercice 11** (Théorème 2.10 (b) )**.** *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice symétrique. Alors montrer que* $A$ *est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non-négatifs.*
*Indication Utiliser l'algorithme 1.2 pour le sens "*$\Leftarrow$*" et le fait qu'il existe une matrice* $Q$ *de permutations telle que l'algorithme 1.2 ne change pas de lignes et de colonnes lorsqu'il est appliqué à la matrice* $QAQ$.