Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 7 7 avril 2011

Exercice 1

(i) Considérer le programme linéaire
$$\max\{c^T x \ : \ Ax \leq b\}$$
avec $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Sa forme duale est
$$\min\{b^T y \ : \ A^T y = c, \ y \geq 0\}.$$
Soient x et y des solutions admissibles respectivement sous forme primale et duale. Démontrer l'affirmation suivante :

Les vecteurs x et y sont optimaux dans la forme correspondante du PL si et seulement si on a soit $a_i^T x = b_i$ soit $y_i = 0$ pour tous $i = 1, \ldots, m$.

Indication : Considérer le produit scalaire $(b - Ax)^T y$ et montrer que l'on trouve 0 si et seulement si x et y sont optimaux. Pourquoi cette affirmation est-elle suffisante ?

(ii) Étant donné le programme linéaire :
$$\begin{array}{rr} \max & x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 22 \\ & x_1 + 5x_2 \leq 23 \end{array}$$
Démontrer que $(4/3, 10/3)$ est une solution optimale en utilisant la première partie de cet exercice.

Exercice 2

Soit $<_{lex}$ l'ordre lexicographique comme défini en cours pour $\mathbb{R}^n$. Soient $p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon)$ deux polynômes de degré n :
$$p_1(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon^i, \qquad p_2(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} b_i \varepsilon^i$$
Démontrer qu'il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tous ε avec $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$:
$$p_1(\varepsilon) < p_2(\varepsilon) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} <_{lex} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

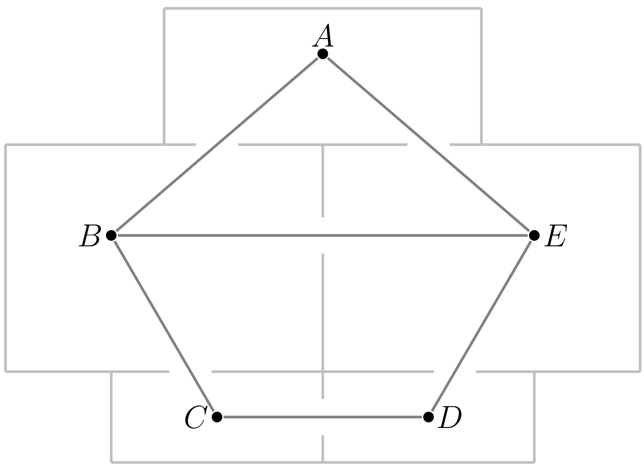
Exercice 3

Étant donné un oracle qui trouve une solution admissible du polyèdre
$$P = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \ : \ \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}\}$$
ou affirme qu'il n'y en a pas, démontrer qu'il est possible de donner une solution *optimale* du programme linéaire
$$\max\{c^T x \ : \ x \in \mathbb{R}^n; \ Ax \leq b\},$$
avec une *seule* interrogation de l'oracle, si tant est que le PL est admissible et borné.

Indication : Utiliser la dualité !

Exercice 4 (Δ), ($*$)

Considérons le jeu suivant, avec un voleur et un gardien. On se trouve dans un petit musée avec cinq salles d'exposition. Elles sont connectées par des portes comme figuré sur le plan du musée ci-dessous. Au même moment, le voleur et le gardien choisissent chacun une salle. Si la salle choisie est la même ou si les salles sont connectées, le gardien gagne. Sinon, le voleur remporte la victoire.
Trouver la matrice des bénéfices du voleur où la valeur $+1$ représente le succès et -1 l'échec. Déterminer ensuite une stratégie mixte qui donne la plus grande valeur au voleur.



Indication : Utiliser le théorème Minimax et SAGE.

Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.