Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 7

$\star$ L'exercice 3 peut être rendu le 13 avril 2017.

Exercice 1. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Exercice 2. Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique. Montrer que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont non négatifs, c'est-à-dire $\det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.
Rappel: Soit $K = \{l_1, \ldots, l_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ où $1 \leq l_1 < l_2 < \cdots < l_k \leq n$. La matrice $B_K \in \mathbb{R}^{k\times k}$ est la matrice $(B_K)_{ij} = A_{l_i l_j}, 1 \leq i, j \leq k$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique.

a) Montrer que A est définie négative si et seulement si $(-1)^k \det(B_k) > 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Montrer que A est semi-définie négative si et seulement si $(-1)^{|K|} \det(B_K) \geq 0$ pour tout $K \subseteq \{1, \ldots, n\}$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et $f(x) = x^T Ax$ la forme quadratique correspondante à A. Montrer que

$$\max_{x\in S^{n-1}} f(x) = \lambda_1 \quad \text{et} \quad \min_{x\in S^{n-1}} f(x) = \lambda_n$$

où λ_1 et λ_n sont les valeurs propres maximale et minimale de A respectivement.

Exercice 6. a) Pour $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $Q(x) = 7x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$, trouver le maximum et le minimum de $Q(x)$ parmi les vecteurs x qui satisfont $||x|| = 1$.

b) Pour $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $Q(x) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$, trouver le maximum et le minimum de $Q(x)$ parmi les vecteurs x qui satisfont $||x|| = 2$.