Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 7

$\star$ L'exercice 8 peut être rendu le 21 avril 2016.

Exercice 1. *Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice symétrique*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice orthogonale $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A.

Exercice 2. *Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.*

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B le base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ et la matrice de changement de base $P_{B'B}$, qui transforme $Q(x)$ dans une forme quadratique sans produits croisés. Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont les axes principaux *de Q.*

Exercice 3. *Pour chaque forme suivante Q, décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.*

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 4. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.*

Exercice 5. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et inversible. Montrer que si la forme quadratique $x^T Ax$ est définie positive, alors la forme $x^T A^{-1}x$ est aussi définie positive. [Indice : Considérer les valeurs propres de A.]*

Exercice 6. *Soit* $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice* $A+B$ *sont aussi strictement positives.*

Exercice 7.

a) Pour $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *définie par* $Q(x) = 7x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2$*, trouver le maximum et le minimum de* $Q(x)$ *parmi les vecteurs* x *qui satisfont* $||x|| = 1$*.*

b) Pour $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *définie par* $Q(x) = 7x_1^2 + x_2^2 + 7x_3^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$*, trouver le maximum et le minimum de* $Q(x)$ *parmi les vecteurs* x *qui satisfont* $||x|| = 2$*.*

Exercice 8. *Soit* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *une matrice symétrique dont les valeurs propres sont* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$*. Soit* $K = \{l_1, \ldots, l_{n-k}\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ *où* $1 \leq l_1 < \cdots < l_{n-k} \leq n$ *et soit* $B \in \mathbb{R}^{(n-k)\times(n-k)}$ *une sous-matrice symétrique de* A *défini par* $B_{ij} = A_{l_i l_j}$ *(ainsi* K *marque les lignes et les colonnes de* A *qui apparaissent dans la matrice* B*.)*

Soient $\mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-k}$ *les valeurs propres de* B*. Montrer que* $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{i+k}$*, pour* $i = 1, \ldots, n-k$*.*

Exercice 9. *Soit* K *un corps fini et soit* $char(K) = q$ *un nombre premier. Montrer qu'il existe un nombre entier* k *tel que* $|K| = q^k$*.*