Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 6

$\star$ L'exercice **8** peut être rendu le 14 avril 2016.

Exercice 1. *Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ des matrices hermitiennes. Montrer que*

(i) Si A est inversible, la matrice A^{-1} est hermetienne.
(ii) La matrice $A + B$ est hermitienne.
(iii) Si $AB = BA$, la matrice AB est hermitienne.

Exercice 2. *Soit $V = \mathbb{C}^3$. Considérons l'application $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ définie par*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1\overline{y}_1 + (1-i)x_1\overline{y}_2 + (1+i)x_2\overline{y}_1 + 3x_2\overline{y}_2 + ix_2\overline{y}_3 - ix_3\overline{y}_2 + 3x_3\overline{y}_3$$

Montrer que $\langle -, - \rangle$ est un produit hermitien.

Exercice 3. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Pour une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V et $x = \sum_i \alpha_i v_i$ et $y = \sum_i \beta_i v_i$ montrer en détail que*

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f \overline{[y]_B}$$

avec la matrice $A_B^f = (f(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}$. Indiquez l'application des axiomes PH 2) et PH 3) dans les pas correspondants.

Exercice 4. *Modifier l'algorithme 1.2 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

Exercice 5. *Soit A la matrice hermitienne*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tel que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. Les éléments de la matrice P sont de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et $\dim(V) = 3$ et $B = \{\underline{v_1}, v_2, v_3\}$ une base de V. Avec les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ décrites en bas et les applications $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cochez où ça applique.*

	A_1	A_2	A_3
forme sesquilinéaire			
produit hermitien			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. *Soit V un espace hermitien. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 8. *Montrer qu'un espace hermitien de dimension fini possède une base B tel que $\langle x, y\rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B}$, où $\cdot$ est le produit hermitien standard.*

Exercice 9. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$. Montrer que :*

$$3\sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2} \geq |2a + ic - 2id|$$
