Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 6

$\star$ L'exercice 7 peut être rendu le 6 avril 2017.

Exercice 1. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit λ une valeur propre de A avec le vecteur propre x correspondant. Montrer que λ est reél.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et inversible. Montrer que si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors toutes les valeurs propres de A^{-1} sont aussi positives.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que si x et y sont deux vecteurs propres de A, $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ et $\lambda \neq \mu$, alors x et y sont orthogonaux.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne et soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base orthonormale des vecteurs propres de A, avec $Av_i = \lambda_i v_i$, pour $1 \leq i \leq n$. Soit $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $P^*P = I_n$ et

$$P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Trouver une matrice orthogonale $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A.

Exercice 6. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$$

Trouver une matrice $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ telle que $P^* \cdot A \cdot P$ est une matrice diagonale. Les éléments de la matrice P sont de la forme $a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D[x]_{B'}$, oú D est une matrice diagonale.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A = B^T B$.