Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 5

$\star$ L'exercice **4** peut être rendu le 7 avril 2016.

Exercice 1. *Deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sont* congruent complexe*, s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tel que*

$$A = P^T \cdot B \cdot \overline{P}.$$

Nous écrivons $A \cong_{\mathbb{C}} B$. Montrer que $\cong_{\mathbb{C}}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Exercice 2. *Est-ce que la matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$$

est congruente à une matrice diagonale ? Renseignement : Voir l'exercice 1 de la série 3.

Exercice 3. *Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle . \rangle$. Soit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V. Montrer que $A_B^{\langle . \rangle} \in K^{n\times n}$ est congruente à une matrice diagonale, si et seulement si V possède une base orthogonale.*

Exercice 4. *Soit K un corps de caractéristique 2 et soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie, muni d'un produit scalaire. Soit*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $\dim(V) = 2$. Montrer que V ne possède pas de base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V telle que $A_B^{\langle . \rangle} = C$.

b) Soit $\dim(V) = 3$. Supposons que

$$A_B^{\langle . \rangle} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V possède une base orthogonale si et seulement si $a \neq 0$.

Renseignement : Si $a \neq 0$ multiplier 3-ème ligne et colonne avec a. Après additionner deuxièmes et troisièmes lignes et colonnes sur le première ligne et colonne respectivement pour obtenir

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Après continuer comme dans notre algorithme.

c) On peut montrer le théorème suivant mais ce ne fait pas partie de cette exercice. V possède une base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V tel que

$$A_B^{\langle . \rangle} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_k & & & \\ & & & & C & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C \end{pmatrix}$$

où au moins un des $d_i \neq 0$.

Exercice 5. *Modifier l'Algorithme 1.2 tel qu'il soit correct aussi pour des corps de caractéristique 2. Soit l'algorithme montre que la matrice symétrique $A \in K^{n\times n}$ n'est pas congruente à une matrice diagonale soit l'algorithme calcule une matrice diagonale congruente à A.*

Exercice 6. *Comment peut-on déterminer si un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire, possède une base orthogonale ? Décrire très brièvement une méthode.*

Exercice 7. *Déterminer l'indice de nullité et l'indice de positivité des produits scalaires définis par les matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. *Soit $\langle . \rangle$ un produit hermitien sur V. Montrer Si u, v et w sont des éléments de V, alors*

$$\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle.$$

Exercice 9. *Démontrer la Proposition 1.26 : Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit B une base de V. Une forme sesquilinéaire f est un produit hermitien, si et seulement si A_B^f est hermitien.*

Exercice 10. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n et soit $\langle . \rangle$ un produit hermitien. Montrer que $\langle . \rangle$ est non dégénéré si et seulement si $\operatorname{rang}(A_B^{\langle . \rangle}) = n$ pour chaque base B de V.*