Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 5

⋆ L'exercice 6 peut être rendu le 30 mars 2017.

Exercice 1. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme sesquilinéaire. Pour une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V et $x = \sum_i \alpha_i v_i$ et $y = \sum_i \beta_i v_i$, montrer en détail que

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f \overline{[y]_B}$$

avec la matrice $A_B^f = (f(v_i, v_j))_{1 \le i,j \le n}$. Indiquer l'application des axiomes PH 2) et PH 3) dans les pas correspondants.

Exercice 2. Démontrer la proposition 1.28: Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et soit B une base de V. Une forme sesquilinéaire f est une forme hermitienne si et seulement si A_B^f est hermitienne.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n et soit $\langle . \rangle$ une forme sesquilinéaire. Montrer que $\langle . \rangle$ est non dégénérée (à gauche) si et seulement si $\text{rang}(A_B^{\langle . \rangle}) = n$ pour toute base B de V.

Exercice 4. Modifier l'algorithme 1.1 afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Exercice 5. Soient V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ tel que $\dim(V) = 3$ et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Avec les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ décrites en bas et les applications $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
forme sesquilinéaire			
forme hermitienne			

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2\cdot i & 3-i \\ 1-2\cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit V un espace hermitien. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni d'un produit hermitien. Montrer l'inégalité triangulaire: pour tous $u, v \in V$, $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$.

Exercice 8. Montrer qu'un espace hermitien de dimension fini possède une base B tel que $\langle x, y \rangle = [x]_B^T \cdot \overline{[y]_B}$, où $\cdot$ est le produit hermitien standard.