Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 4 **17 mars 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre une solution écrite à l'exercice 2 avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. On peut obtenir un point bonus cette semaine. L'exercice à rendre est le même pour tous les étudiants.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Résoudre le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & -5/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \\ -7/2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } c^T = (-5, 3, 4, -1)$$

à l'aide de l'algorithme du simplexe. Commencer avec le toit initial défini par les 4 premières lignes. Vous pouvez utiliser SAGE pour déterminer les résultats intermédiaires de l'algorithme du simplexe.

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Considérer le programme linéaire $\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}$. Soit B un toit du PL.

(i) Considérer ce système d'égalités pour $j \in B$:

$$\begin{aligned} a_j v &= -1 \\ a_i v &= 0 \quad \forall i \in B, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{1}$$

Démontrer l'affirmation suivante : Si x est une solution admissible du PL-toit et v est une solution du système (1), on trouve que pour tous $\lambda > 0$, le vecteur $x + \lambda v$ est aussi une solution admissible du PL-toit.

(ii) Donner une preuve pour cette proposition :
Le *sommet* du toit B est l'unique solution optimale du PL-toit si et seulement si c est une combinaison conique des vecteurs a_i, $i \in B$ avec des facteurs strictement positifs.

Exercice 3

Soit $x^* \in P$ un *sommet* du polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$, c'est-à-dire qu'il existe $A'x^* = b'$ où A' est composée par n lignes de A qui sont linéairement indépendantes et b' est formé par les composantes correspondantes de b.

Démontrer qu'il existe un hyperplan dont l'intersection avec P est exactement $\{x^*\}$. En autres termes, il existe un vecteur c tel que x^* est l'unique solution optimale du programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}.$$