Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 4

L'exercice 5 peut être rendu le 24 mars 2016.

Exercice 1. *Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. On définit $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in V^*$ par :*

$$\psi_1(p(t)) = \int_0^1 p(t)dt\,, \qquad \psi_2(p(t)) = p'(1)\,, \qquad \psi_3(p(t)) = p(0)\,,$$

pour tout $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$.

a) Montrer que (ψ_1, ψ_2, ψ_3) est une base de V^*.

b) Trouver la base F de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ telle que sa base duale F^* soit égale à (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

c) Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et soit $E^* = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ sa base duale. Trouver la matrice de passage de la base E^* vers la base F^*.

d) Soit $\mu : \mathbb{R}[t]_{\leq 2} \to \mathbb{R}$ défini par $\mu(p(t)) = p(2)$ pour tout $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Exprimer μ comme combinaison linéaire de E^* et comme combinaison linéaire de F^*.

Exercice 2. *Soit V un K-espace vectoriel de dimension n, soit $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ une base de l'espace dual V^*, et soit $v \in V$. Montrer que, si $\phi_i(v) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $v = 0$.*

Exercice 3. *Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, définissons la forme linéaire $\psi_a : V \to \mathbb{R},\ p(t) \mapsto p(a)$. Soient maintenant $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les formes linéaires ψ_a, ψ_b, ψ_c forment une base de V^* si et seulement si les nombres a, b, c sont distincts.*

Exercice 4. *On définit $\beta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par*

$$\beta\big((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\big) = 2x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 8x_3y_3.$$

a) Montrer que β est un produit scalaire. Trouver la matrice de β par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b) Le produit scalaire β est-il non dégénérée?

c) Calculer l'orthogonal du sous-espace $W = \mathrm{span}\big((1, 4, 5), (1, 4, -4)\big)$.

d) Calculer $W \cap W^\perp$. La restriction de β à W est-elle non dégénérée?

Exercice 5. *(*) Soit $\beta : V \times V \to K$ un produit scalaire sur un K-espace vectoriel V et soit W un sous-espace vectoriel de V.*

a) Montrer que la restriction de β à W (à savoir $\beta\big|_{W\times W} : W \times W \to K$) est non-dégénérée si et seulement si $W \cap W^\perp = \{0\}$.

b) On considère le cas particulier où $V = \mathbb{R}^2$ et $\beta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $\beta\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1y_2 + x_2y_1$. Est-ce que β est non-dégénérée ? Est-ce que sa restriction au sous-espace vectoriel $W = \operatorname{span}(e_1)$ est non-dégénérée (où e_1 est le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^2$) ?

Exercice 6. *Soit $\beta : V \times V \to K$ un produit scalaire sur un K-espace vectoriel V.*

a) Soient U_1 et U_2 deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer que, si $U_1 \subseteq U_2$, alors $U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$.

b) Soient U et W deux sous-espaces vectoriels de V. Montrer que $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

Exercice 7. *Soit K un corps. Deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$ sont* équivalent *s'il existe une matrice $P \in K^{n\times n}$ inversible tel que*

$$A = P^T BP.$$

Nous écrivons $A \cong B$. Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$.

Exercice 8. *Déterminer l'indice de nullité et l'indice de positivité des produits scalaires défini par les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque: l'entier r du théorème de Sylvester est appelé indice de positivité *du produit scalaire.*

Exercice 9. *Soit V un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{R}$ et suit $\langle . \rangle$ un produit scalaire sur V. Montrer que V admet une décomposition en somme directe*

$$V_0 \oplus V^+ \oplus V^-$$

où V_0 est l'espace nullité et V^+ et V^- sont des sous espaces tel que

$$\langle v, v \rangle > 0 \text{ pour tout } v \in V^+ \setminus \{0\}$$

et

$$\langle v, v \rangle < 0 \text{ pour tout } v \in V^- \setminus \{0\}.$$