Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 4

$\star$ L'exercice 8 peut être rendu le 23 mars 2017.

Exercice 1. Soient les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la distance entre u et $V = \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$? La distance entre u et V est $dist(u, V) = \min_{v \in V} ||u - v||$, oú la norme $|| \cdot ||$ est par raport au produit scalaire ordinaire.

Exercice 2. Soit $\mathbb{C}^2$.

a) Donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur le corps $\mathbb{C}$. Quelle est sa dimension ?

b) Donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^2$ sur le corps $\mathbb{R}$. Quelle est sa dimension ?

Exercice 3. 1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \to K$ une forme linéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x) = a^\top [x]_B,$$

avec $a \in K^n$. Décrire $f(x)$ en termes de $P_{B'B}$ et $[x]_{B'}$.

2. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire, et B, B' des bases de V. Soit

$$f(x, y) = [x]_B^\top A_B^f [y]_B.$$

Décrire $f(x, y)$ en termes de $P_{B'B}$, $[x]_{B'}$ et $[y]_{B'}$. *Rappel*: La matrice $P_{B'B}$ est la matrice de passage qui transforme un vecteur de la base B' dans la base B.

Exercice 4. Soient v_1 et $v_2 \in \mathbb{Z}_2^4$, donnés par

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère la forme bilinéaire standard $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i$. Trouver une base de $\text{span}\{v_1, v_2\}^\perp$. Est-ce que $\mathbb{Z}_2^4 = \text{span}\{v_1, v_2\} \oplus \text{span}\{v_1, v_2\}^\perp$?

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^{\perp}$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$.

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ linéairement indépendants. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire. Soit W un sous-espace vectoriel de V, montrer que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

Exercice 8. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur V. Soient $W_1, W_2 \subseteq V$ deux sous-espaces de V. Exprimez $(W_1 + W_2)^{\perp}$ et $(W_1 \cap W_2)^{\perp}$ en fonction de $W_1^{\perp}$ et $W_2^{\perp}$.