Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 3

$\star$ L'exercice 6 peut être rendu le 17 mars 2016.

Exercice 1. *On considère les vecteurs* $v_1, v_2,$ *et* $v_3 \in \mathbb{Z}_2^4$ *donnés par*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Est-ce que $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *possède une base othogonale par rapport au produit scalaire standard de l'exemple 1.1 ?*
Rappel : Soit $V = K^n$*, le produit scalaire est donné par*

$$(u, v) \mapsto \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$

Exercice 2. *On considère le produit scalaire de l'exercice 1. Trouver une base orthogonale du sous-espace de* $\mathbb{Z}_3^4$ *engendrés par les vecteurs* $v_1, v_2,$ *et* $v_3 \in \mathbb{Z}_3^4$ *donnés par*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

1. *Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie,* $f : V \to K$ *une forme linéaire, et* B, B' *des bases de* V*. Soit*
$$f(x) = a^\top [x]_B,$$
avec $a \in K^n$*. Décrire* $f(x)$ *en termes de* $P_{B'B}$ *et* $[x]_{B'}$*.*
2. *Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie,* $f : V \times V \to K$ *une forme bilinéaire, et* B, B' *des bases de* V*. Soit*
$$f(x, y) = [x]_B^\top A_B^f [y]_B.$$
Décrire $f(x, y)$ *en termes de* $P_{B'B}$*,* $[x]_{B'}$ *et* $[y]_{B'}$*. Rappel : La matrice* $P_{B'B}$ *est la matrice de passage qui transforme un vecteur de la base* B' *dans la base* B*.*

Exercice 4. *Soient v_1 et $v_2 \in \mathbb{Z}_2^4$, donnés par*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad et \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère le produit scalaire standard de l'exercice 1. Trouver une base de span$\{v_1, v_2\}^\perp$. Est-ce que $\mathbb{Z}_2^4 =$ span$\{v_1, v_2\} \oplus$ span$\{v_1, v_2\}^\perp$?

Exercice 5. *Soit $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ l'espace euclidien des polynômes de degré au plus n muni du produit scalaire $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Décrire la matrice $A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ pour $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$.*
Notation : la matrice $A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ est la matrice correspondant à la base B et au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Exercice 6. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ linéairement indépendants. Montrer que*

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Exercice 7. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, muni d'un produit scalaire non-dégénéré. Soit W un sous-espace vectoriel de V, montrer que $(W^\perp)^\perp = W$.*

Exercice 8. *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K, et soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire. Exprimez $(W_1 + W_2)^\perp$ et $(W_1 \cap W_2)^\perp$ en fonction de $W_1^\perp$ et $W_2^\perp$.*

Exercice 9. *Donner un exemple d'un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire dégénéré et d'un sous espace $W \subseteq V$ tel que V n'est pas la somme directe de W et $W^\perp$.*