Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 3

L'exercice 4 peut être rendu le 16 mars 2017.

Exercice 1. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle . \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2$.

b) Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Exercice 2. En considérant l'Exemple 1.2 du cours, montrer que l'ensemble de fonctions

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots\}$$

est un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

Exercice 3. Trouver la factorisation $Q \cdot R$ du Corollaire 1.18 de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver la factorisation $Q \cdot R$ de la matrice $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Exercice 4. Trouver une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^2$ telle qu'il existe des vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ avec $\langle u, u \rangle < 0$ et $\langle v, v \rangle > 0$.

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique. Montrer que s'il existe des vecteurs $u, v \in V$ tels que $\langle u, u \rangle < 0$ et $\langle v, v \rangle > 0$, alors il existe un vecteur $w \neq 0$ tel que $\langle w, w \rangle = 0$.

Exercice 6. Montrer que l'inégalité de Bessel (Théorème 1.19) est une égalité si le vecteur v est dans le sous-espace engendré par les vecteurs $v_1, \dots, v_n$.

Exercice 7. On considère l'espace euclidien $C([0,1])$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$ avec une fonction définie par

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : C([0,1]) \times C([0,1]) &\to \mathbb{R} \\ \langle f, g \rangle &\mapsto \int_0^1 f(x)g(x)\,dx. \end{aligned}$$

(i) Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire.

(ii) Soit V le sous espace engendré par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Trouver une base orthonormale de V.

(iii) Sois V le sous espace engendré par $\{1, x, x^2\}$. Trouver une base orthonormale de V.

Exercice 8. Soient V un espace euclidien, $\{u_1, \dots, u_n\}$ un ensemble orthonormal et $f, g \in \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. Montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, u_i \rangle \langle u_i, g \rangle.$$