Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 2

$\star$ L'exercice 2 peut être rendu le 2 mars 2017.

Exercice 1. Montrer que $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$.

Exercice 2. Est-ce que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$$

est congruente à une matrice diagonale? *Renseignement: voir l'exercice 7 de la série 1.*

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique $\langle . \rangle$. Soit $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de V. Montrer que $A_B^{\langle . \rangle} \in K^{n\times n}$ est congruente à une matrice diagonale si et seulement si V possède une base orthogonale.

Exercice 4. Soit K un corps de caractéristique 2 et soit V un espace vectoriel sur K de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire symétrique. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Soit $\dim(V) = 2$. Montrer que V ne possède pas de base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V telle que $A_B^{\langle . \rangle} = C$.

b) Soit $\dim(V) = 3$. Supposons que

$$A_B^{\langle . \rangle} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que V possde une base orthogonale si et seulement si $a \neq 0$.

Renseignement: Si $a \neq 0$, multiplier la 3-ème ligne (resp. colonne) par a. Ensuite, ajouter la 2-ème et 3-ème lignes (colonnes) dans la premire ligne (colonne) pour obtenir

$$\begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Puis continuer comme dans notre algorithme.

c) (Difficile / optionnel) Montrer le théorème suivant. V possède une base orthogonale si et seulement s'il existe une base B de V telle que

$$A_B^{\langle\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_k & & & \\ & & & & C & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & C \end{pmatrix}$$

où au moins un des coefficients $d_i \neq 0$.

Exercice 5. Modifier l'algorithme 1.1 tel qu'il soit aussi correct pour des corps de caractéristique 2. Soit l'algorithme découvre que la matrice symétrique $A \in K^{n\times n}$ n'est pas congruente à une matrice diagonale soit l'algorithme calcule une matrice diagonale congruente à A.

Exercice 6. Comment peut-on déterminer si un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique possède une base orthogonale? Décrire très brièvement une méthode.

Exercice 7. Transformez les matrices suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Le théorème de Sylvester montre que les nombres des $0, 1$ et -1 sont unique. Ils sont appelés l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$