Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 2

$\star$ L'exercice 2 peut être rendu le 10 mars 2016.

Exercice 1. *Trouver la factorisation $Q \cdot R$ du Corollaire 1.10 de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ($\star$). *Trouver la factorisation $Q \cdot R$ du Corollaire 1.10 de la matrice $n \times n$*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. *Montrer que l'inégalité de Bessel (Théorème 1.11) est une égalité si le vecteur v est dans les sous-espace engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.*

Exercice 4. *Soit*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) *Trouver une base orthonormale du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs de S.*
(b) *Montrer que S peut être complété par un autre vecteur pour former une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 5. *Soit*

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Trouver $u \in span\{v_1, v_2\}$ tel que la distance

$$\|v - u\|$$

est minimale.

Exercice 6. *On considère l'espace euclidien des fonctions continues sur l'intervalle* $[0, 1]$ *munit du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

(i) Soit V *le sous espace engendré par* $f(x) = x$ *et* $g(x) = x^2$*. Trouver une base orthonormale de* V*.*

(ii) Sois V *le sous espace engendré par* $\{1, x, x^2\}$*. Trouver une base orthonormale de* V*.*

Exercice 7. *Est-ce qu'il faut vraiment supposer que le produit scalaire* $\langle . \rangle$ *est sur* $\mathbb{R}$ *et défini positif pour le procédé de Gram-Schmidt ? Peux-tu imaginer une condition plus faible sur le produit scalaire qui permet ce procédé ?*