Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 1 **24 février 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. Les mathématiciens doivent traiter l'exercice (*). Les autres par contre peuvent choisir entre l'exercice (*) ou (Δ).
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

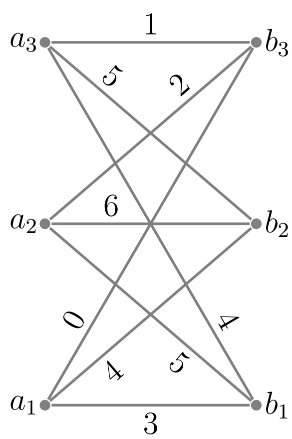
Démontrer que si $\lambda \geq 0$, on trouve

$$\lambda^T A x \leq \lambda^T b,$$

pour $\lambda, b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax \leq b$.
Quelle est la relation entre $\lambda^T A x$ et $\lambda^T b$ si on supprime la condition $\lambda \geq 0$?

Exercice 2

Considérons le graphe biparti $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ représenté à droite. On donne des poids c positifs sur les arêtes. Nous cherchons un couplage[1] dans G tel que la somme des poids des arêtes choisies soit maximisée.



Démontrer que $M = \Big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \{a_3, b_1\}\Big\}$ est une solution optimale.

Indication :

(i) Combien de couplages existe-il pour $|\mathcal{A}| = n = |\mathcal{B}|$?
(En d'autres termes, combien de solutions faut-il comparer pour démontrer qu'un couplage est optimal ?)

1. Rappelons qu'un *couplage* est un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes à un même sommet. Un couplage M est parfait si chaque sommet est incident à exactement une arête $e \in M$.

Le programme linéaire suivant décrit le problème (à voir plus tard dans le Cours)

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum_{e\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} c_e x_e & & & \\ & \sum_{e\in\delta(v)} x_e & \leq & 1 & \forall v \in \mathcal{A}\cup\mathcal{B} \qquad (\delta(v) := \{e\in\mathcal{A}\times\mathcal{B} \mid v\in e\}) \\ & x_e & \geq & 0 & \forall e \in \mathcal{A}\times\mathcal{B} \end{array}$$

(ii) Qu'est-ce que vous trouvez en utilisant l'exercice 1 avec $\lambda = (0, 2, 1, 3, 4, 0)$ et les 6 premières inégalités (pour les nœuds $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$) du programme linéaire ci-dessus ?

Exercice 3 (Δ)
Considérons le problème

$$\begin{array}{rl} \min & 2x + 3y \\ \text{sous contraintes} & -|x+2| + y \geq -6 \\ & 8 - 2x \leq y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(i) Reformuler le problème comme un programme linéaire sous la forme standard avec inégalités.
(ii) Trouver une solution optimale.
(iii) Démontrer que votre solution est optimale.

Exercice 4

Donner une preuve ou un contre-exemple :
L'ensemble des solutions optimales d'un programme linéaire est toujours fini.

Exercice 5 (*)

Soit

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

un programme linéaire sous la forme standard avec inégalités, où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.
Démontrer qu'il existe un programme linéaire équivalent de la forme

$$\min\{\tilde{c}^T x \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\} \tag{2}$$

où $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times\tilde{n}}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ et $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ sont tels que chaque point optimal de (1) correspond à un point optimal de (2) et vice-versa.
On dit que les programme linéaires de la forme (2) sont sous la *forme standard avec égalités.*