Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Série 1

$\star$ L'exercice 5 peut être rendu le 30 février 2017.

Exercice 1. Montrer que les deux formes bilinéaires suivantes sont non dégénérées.

a) Soit $V = K^n$, et soit $\langle\,\rangle\colon V \times V \longrightarrow V$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \langle\,\rangle\colon V \times V & \longrightarrow & K \\ (u,v) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n u_i v_i. \end{array}$$

b) Soit V l'espace des fonctions continues à valeurs réelles, définies sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Si $f, g \in V$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V. Une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 4. Soit $V \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ l'espace euclidien des polynômes de degré au plus n. Si $f, g \in V$ on pose

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Décrire la matrice A_B^f pour $B = \{1, x, \ldots, x^n\}$.

Exercice 5. On définit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 8x_3y_3.$$

Soient

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ et } B' = \left\{b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

a) Trouver la matrice A_B^f par rapport à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

b) Trouver la matrice de changement de base $P_{B'B}$.

c) Trouver la matrice $A_{B'}^f$ par rapport à la base B' de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel sur un corps K et $\langle\rangle \colon V \times V \to K$ une forme bilinéaire. Soient $E \subseteq V$ et E^* le sous-espace de V engendré par les éléments de E. Montrer $E^\perp = E^{*\perp}$.
Rapel: Pout $W \subseteq V$, $W^\perp = \{v \in V : v \perp w \text{ pour tout } w \in W\}$.

Exercice 7. On considre les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que span$\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport la forme bilinéaire symétrique standard de l'exercice 1a)?

Exercice 8. Soit K un corps. Si la caractéristique de K est différente de zéro, alors elle est un nombre premier.

Exercice 9. Soit K un corps fini. Montrer que $|K| = q^\ell$ pour un nombre premier q et un nombre naturel $\ell \in \mathbb{N}$. *Indication : K est un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{Z}_q$ pour un nombre premier q.*