Algèbre linéaire avancée II
printemps 2016

Série 1

$\star$ L'exercice 3 peut être rendu le 3 mars 2016.

Exercice 1. *Soit V un espace vectoriel sur le corps K muni d'un produit scalaire. Soit $E \subseteq V$ et E^* le sous espace de V engendré par les éléments de E. Montrer que $E^\perp = E^{*\perp}$.*

Exercice 2. *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire défini positif. Soit $v_1, \ldots, v_r \in V$ des vecteurs non nuls 2 à 2 orthogonaux (c'est-à-dire $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $1 \leq i \neq j \leq r$).*

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \ldots + v_r\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_r\|^2$.

b) Montrer que $v_1, \ldots, v_r$ sont linéairement indépendants.

Exercice 3 ($\star$). *Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire. S'il existe des vecteurs $u, v \in V$ tels que $\langle u, u \rangle < 0$ et $\langle v, v \rangle > 0$, il existe un vecteur $w \neq 0$ tel que $\langle w, w \rangle = 0$.*

Exercice 4. *Considérant l'Exemple 1.2 du cours, montrer que l'ensemble de fonctions*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x), \ldots\}$$

est un ensemble de vecteurs 2 à 2 orthogonaux.

Exercice 5. *Construire un produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^2$ tels que $\langle u, u \rangle < 0$ et $\langle v, v \rangle > 0$. Vérifier les conditions PS 1)-PS 3).*

Exercice 6. *Montrer l'inégalité triangulaire (Théorème 1.6 du cours) :*

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire défini positif. Si $v, w \in V$,

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Exercice 7. *Soient*

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

des éléments de $\mathbb{R}^4$. Quelle est la composante α de v sur w ? Quelle est la projection de v sur w ? Vérifier $\langle w, v - \alpha\, w \rangle = 0$.
