OPTIMISATION DISCRÈTE
PROF. F. EISENBRAND

Semestre de printemps 2013
27 juin 2013

Examen blanc

Nom : Prénom :

Exercice :	1	2	3	4	5	6	Σ
Note maximale :	10	10	10	10	10	10	50
Points obtenus :							
Exercices choisis :							

Contrôlez si le sujet est complet : il doit se composer de 9 pages (Exercices 1–6). Inscrivez vos nom et prénom sur la couverture. La réponse doit être rédigée sous l'exercice, et éventuellement au recto. Justifiez les réponses et argumentez d'une manière claire et compréhensible. Si vous avez besoin de papier, demandez-en à l'un des assistants. Indiquez sur chaque feuille supplémentaire votre nom et l'exercice correspondant.

Utiliser un stylo de couleur autre de rouge, pas de crayon !

Durée : 3 heures

Notation :
Chaque exercice est noté sur 10 points et vous devez travailler sur 5 exercices.
Indiquer les 5 exercices choisis dans le tableau ci-dessus !

Aucune aide n'est permise pendant l'examen !

Exercice 1 : (QCM, chaque question est notée dans $\{-1,0,1\}$, l'exercice rapporte $\max\{0,\Sigma\}$)
Aucune justification nécessaire. Marquer 'oui' ou 'non'.
Des réponses fausses entraînent des points négatifs !

a)	Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $A^T\lambda \geq 0$ et $b^T\lambda < 0$, alors le système $Ax = b$, $x \geq 0$ est inadmissible.	○ oui ○ non
b)	Étant donné $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, on a $$\min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq \mathbf{0}\} = \max\{b^T y \mid A^T y \leq c\}$$ si les deux PL sont admissibles.	○ oui ○ non
c)	Considérer un polyèdre P non-vide et supposer que pour chaque variable x_i, on ajoute soit la contrainte $x_i \geq 0$ soit $x_i \leq 0$. Est-il vrai que le polyèdre résultant a au moins une solution basique admissible ?	○ oui ○ non
d)	Pour tout graphe non-orienté $G = (V,E)$, la matrice d'incidence sommets-arêtes est totalement unimodulaire.	○ oui ○ non
e)	Étant donné le PL $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$, avec $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}, b \in \mathbb{Z}^m, c \in \mathbb{R}^n$, A de plein rang-colonne. Si A est totalement unimodulaire, alors chaque solution basique du PL est un vecteur intégral.	○ oui ○ non
f)	Le programme linéaire suivant a une solution optimale qui est intégrale. $$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 \quad \leq 1 \\ & x_1 + x_3 \quad \leq 1 \\ & x_2 + x_3 \quad \leq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$	○ oui ○ non
g)	Étant donné un PL $$\max\{c^T x \mid Ax \leq b\},$$ avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$. Si $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont des solutions optimales du PL, alors le vecteur $\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)}$ est une solution optimale pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$.	○ oui ○ non
h)	Étant donné le PL $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$, avec $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, soit j la contrainte qui entre dans la base pendant l'itération i de l'algorithme du simplexe. Alors cette contrainte ne peut pas sortir de la base pendant l'itération $(i+1)$.	○ oui ○ non
i)	Soit $G = (V,A)$ un graphe orienté avec une fonction de longueur $\ell : A \to \mathbb{Z}$. On peut décider s'il existe un cycle négatif (par rapport à ℓ) en temps $O(\lvert V\rvert \cdot \lvert A\rvert)$.	○ oui ○ non
j)	Le problème du sac-à-dos peut être résolu en temps polynômial.	○ oui ○ non

Exercice 2 (Dualité, RC):

Considérer le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{lrcrcrcr} \min & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 20 \\ & -x_1 & & & + & 3x_3 & \leq & 10 \\ & & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 3 \\ & 4x_1 & + & x_2 & & & \leq & 40 \\ & x_1 & - & 10x_2 & + & x_3 & \geq & -3 \end{array} \tag{1}$$

(a) Trouver le dual du PL (1).

(b) Montrer que $x^* := (\frac{19}{8}, \frac{9}{16}, \frac{33}{8})^T$ est une solution optimale du PL (1) en donnant une solution admissible sous la forme duale.

Indication : Utiliser le théorème vu comme exercice (relâchement complémentaire) : étant donnée une solution optimale x^* sous forme primale, il existe une solution optimale y^* sous forme duale telle que $y_i^* = 0$ pour toute ligne i du PL primal qui n'est pas satisfaite avec égalité par x^*.

Solution:

Utiliser le verso pour plus d'espace

Exercice 3 (Sommets):

Un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ *contient une droite*, s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ non-nul et un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ de sorte que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $x^* + \lambda \cdot v \in P$. Démontrer qu'un polyèdre non-vide ne contient pas de droite si et seulement si la matrice A est de plein rang-colonne.

Solution:

Utiliser le verso pour plus d'espace

Exercice 4 (Algorithme du Simplexe):

Considérons le programme linéaire suivant :

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & & \\
 & -y_1 & + & 4y_2 & + & 2y_3 & \leq & 5 \\
 & 2y_1 & - & 6y_2 & - & y_3 & \leq & 2 \\
 & 2y_1 & - & 3y_2 & + & 4y_3 & \leq & 1 \\
 & -y_1 & & & & & \leq & 0 \\
 & -y_2 & & & & & \leq & 0 \\
 & -y_3 & & & & & \leq & 0
\end{array}
$$

Résolvez le PL en utilisant l'algorithme du simplexe avec la règle de Bland.
Commencez avec la base $B = \{4,5,6\}$ et le sommet $(0,0,0)$.
Pour chaque itération de l'algorithme du simplexe, indiquer l'index de la contrainte qui entre dans la base, l'index de la ligne qui sort de la base, la nouvelle base et la solution basique.

Donner une solution optimale et sa valeur.

Remarque : Pour l'examen, on vous donne les inverses de toutes les matrices qui correspondent à une base.

Solution:

Utiliser la page suivante pour plus d'espace

Exercice 5 (Modéliser un flot):

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté biparti (c-à-d qu'il existe $A, B \subset V$ de sorte que $V = A \cup B$ et $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$).
Donner une manière de trouver une couverture minimum de sommets dans G qui s'exécute en temps $O(|V| \cdot |E|)$, en utilisant des flots.

Rappel : Une couverture de sommets est un sous-ensemble des sommets qui contient (au moins) une extrémité de chaque arête.

Solution:

Utiliser la page suivante pour plus d'espace

Exercise 6 (Programmation dynamique):

Considérer le jeu suivant (jeu de Nim ou *Prends!*) :
Étant donné n tas d'allumettes de taille $c_1, \ldots, c_n$. À tour de rôle, chaque joueur choisit le tas de son choix, et dans ce tas, prend le nombre d'allumettes qu'il veut, au moins une. Le vainqueur est celui qui peut jouer en dernier, c'est-à-dire celui qui prend la dernière allumette.

Considérer ce jeu entre deux joueurs A et B où A commence. Donner un algorithme qui décide lequel des deux peut obtenir la victoire de force (c'est-à-dire indépendant des décisions de l'autre, il rapporte le jeu).

Indication : Vous pouvez utiliser le fait qu'il existe toujours une stratégie gagnante pour un des deux joueurs.

Solution:

Utiliser le verso pour plus d'espace