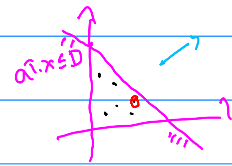
Programmation dynamique (Problème Sac à dos)

PLI : $\max\ c^T \cdot x$

$$A x \leq b$$
$$x \in \mathbb{Z}^n$$

Problème est NP-complet !

Le PLI le plus simple (?)

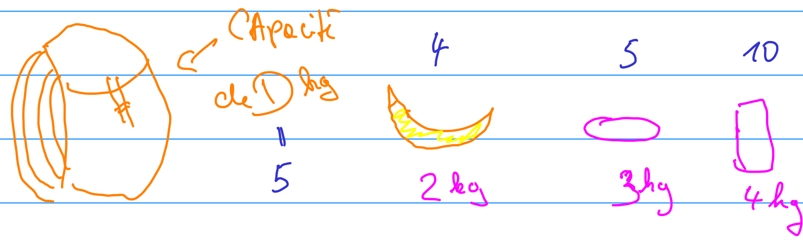


$$\max\ c^T x$$
$$a^T x \leq D$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

$a \in \mathbb{N}^n$

$D \in \mathbb{N}$

$c \in \mathbb{N}_0^n$



Solution optimale : Seulement Chocolat !

$a : (2,3,4)$, $D = 5$, $c = 4, 5, 10$

$$\max\ 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3$$
$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \leq D$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$$

☹ Problème est aussi NP-hard.

Quoi faire ? But : Il y a un algo. qui se déroule en temps polynomial dans l'encoding unaire.

$4 \rightarrow 100$ binaire

$\rightarrow 1111$ unaire

$100 \rightarrow \underbrace{1111 \ldots 1}_{100\times}$ unaire

<u>Idée :</u> Construire un graphe orienté sans cycles, tel que la solution optimale peut être récupérer d'un chemin plus court pondéré.

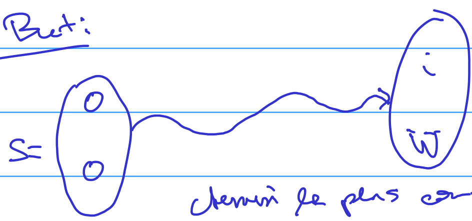
$0 \le i \le n$

polynomiel en encoding unaire

Valeure $0 \le W \le \sum_{i=1}^{n} c_i$

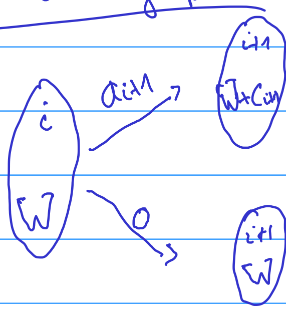
Nombre des sommets : $O(n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i)$ ← polynomiel en encoding binaire

<u>But :</u>

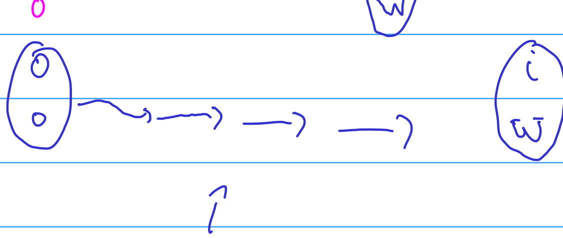


chemin le plus court pondéré devrait avoir une longueure ≈ poids min entre des premiers i objects qui donnent une volume de W

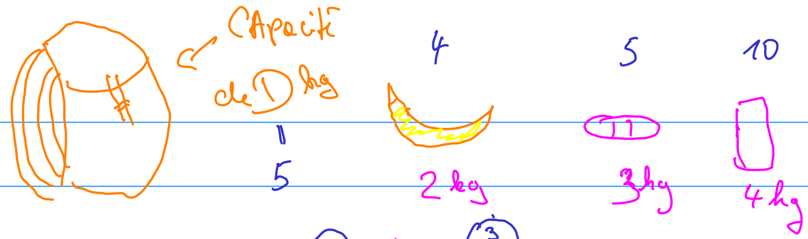
<u>Construction de ce graphe !</u>

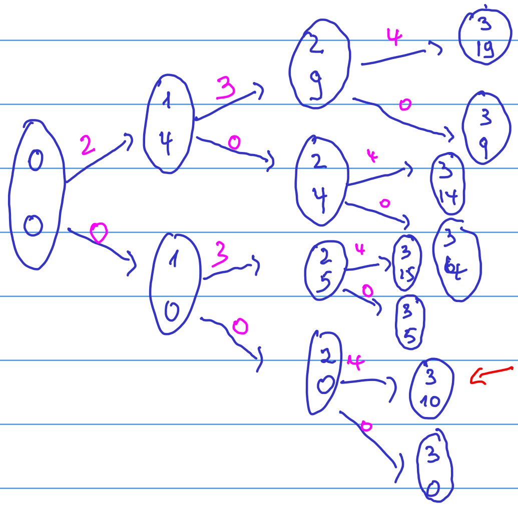


<u>Théorème :</u> Le problème du sac à dos peut être résolu en temps $O(n \cdot \sum_{i=1}^{n} c_i)$



Chemin encode un sous-ensemble des premier i elements de valeur W.
~~La~~ La longueure de ce chemin est le poids de cet ensemble.



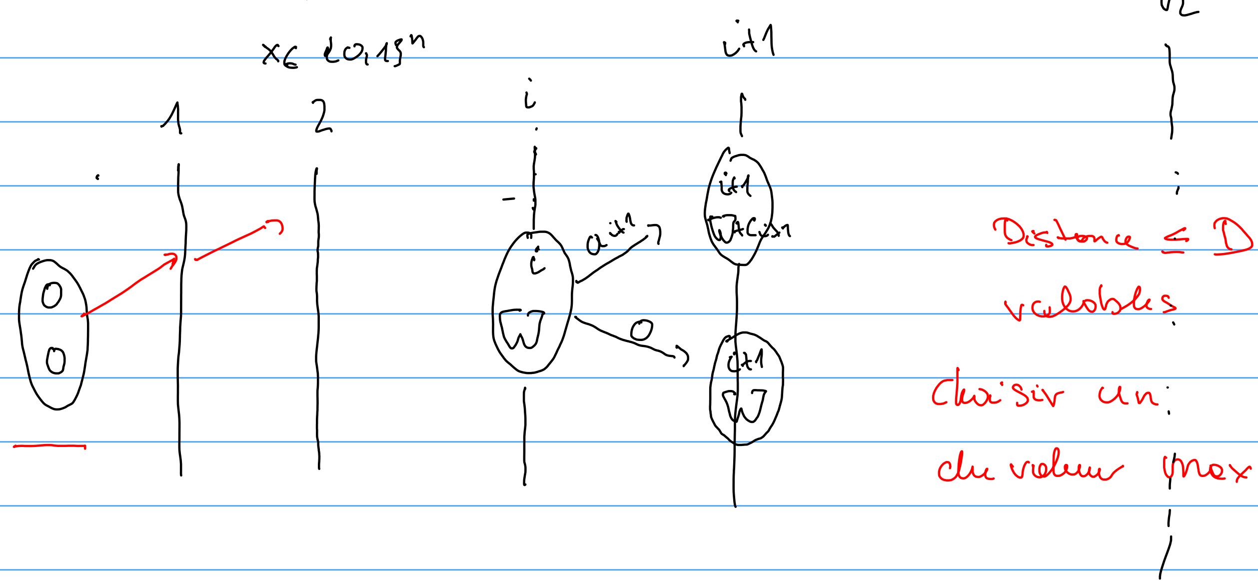


distance ≤ 4
⇒ admissible
et valeur est
maximale.

NP-hard

$$\max \; c^T \cdot x$$
$$a^T \cdot x \leq D$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

$W \leq n \cdot C_{max}$



$x_1 = 1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = 0$ $\quad x_4 = 1$ $\quad x_5 = 1$ $\quad$ ... Taille Tableau : $O(n^2 \cdot C_{max})$

Un algorithme approximatif

A est un algorithme approximatif avec garantie ε

si $\quad A(I)\,(1+\varepsilon) \geq OPT(I)$

valeur de la sol. produit par A $\qquad$ valeur solution optimale

But: $I = (c, a, D)$ est une instance du problème sac à dos. A devrait se dérouler en temps polynomial en longueur du encoding binaire de I et de $1/\varepsilon$

$$\max \sum_{i\in 1}^{n} c_i \cdot x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i \leq D$$

$$x \in \{0,1\}^n$$

$C \in \mathbb{N}^n$ ← Profits

$a \in \mathbb{N}^n$ ← Poids. $\|a\|_\infty \leq D$

$D \in \mathbb{N}$.

arrondis par le bas par composante

Considerer Profits $c' = \left\lfloor \dfrac{C}{\lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor} \right\rfloor$ $C_{max} = \|C\|_\infty$

Alors on peut écrire $C = c' \cdot \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor + c''$ $\|c''\|_\infty \leq \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor$

$(\delta = \varepsilon / n)$

Utiliser c' au lieu de c

x' : sol opt. c'

X_{opt} : sol opt c

Comparer les valeurs de X_{opt} et x' :

$$C(X_{opt} - X')$$

$$= \underbrace{c' \cdot \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor (X_{opt} - X')}_{\leq 0} + \underbrace{c''(\overbrace{X_{opt} - X'}^{\in \{0,\pm 1\}^n})}_{\leq n \cdot C_{max} \cdot \delta}$$

$c' \cdot x' \geq c' \cdot X_{opt}$

$$\Rightarrow c^T \cdot X_{opt} \leq c^T \cdot x' + n \cdot C_{max} \cdot \delta$$

$$\Rightarrow \frac{C^T \cdot X_{opt}}{C^T \cdot X'} \leq \left(1 + \frac{n \cdot C_{max} \cdot \delta}{\underbrace{C^T \cdot X'}_{\geq \frac{1}{2} C_{max}}}\right) \leq (1 + 2 n \cdot \delta)$$

$\varepsilon = 2n \cdot \delta$

$c' \cdot x' \geq c'_{MAX}$

$\Rightarrow c x'$

$= (c' \cdot \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor + c'') \cdot x'$

$\geq c'_{max} \cdot \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor$

$= \left\lfloor \dfrac{C_{max}}{\lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor} \right\rfloor \lfloor C_{max} \delta \rfloor \geq \left(\dfrac{C_{max}}{\lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor} - 1 \right) \cdot \lfloor C_{max} \cdot \delta \rfloor$

$\geq C_{max} - 1 \geq \frac{1}{2} C_{max}$

$2 \cdot n \cdot \delta = \varepsilon$ alors $\|c'\|_\infty \leq \dfrac{1}{\delta} \dfrac{C_{max} \cdot \delta}{C_{max} \cdot \delta - 1} = \dfrac{1}{\delta} \left(1 + \overbrace{\dfrac{1}{C_{max} \cdot \delta - 1}}^{\leq 2} \right)$

$\leq \dfrac{2}{\delta} = \dfrac{4n}{\varepsilon}$

Pour résoudre

$$\max c^T \cdot x$$
$$a^T \cdot x \leq D$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

on a besoin du temps

$$O(n^2 \cdot c'_{MAX}) = O\left(n^2 \cdot \frac{4n}{\varepsilon}\right)$$
$$= O(n^3 / \varepsilon)$$