Algèbre linéaire avancée II 28.4.2016
Prof. Friedrich Eisenbrand

# Examen Blanc

Nom : Prénom :

| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | Total | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Valeur | /4 | /4 | /3 | /3 | /3 | /3 | /8 | /8 | /8 | /8 | /8 | /60 | /6 |
| Points | | | | | | | | | | | | | |

L'objectif de cet examen blanc est de vous donner une idée de ce qu'aura l'air l'examen final. L'examen final aura le même format, et aura une durée de 3 heures. Les exercices de cet examen couvrent seulement une partie des sujets du cours ; par contre, on vous conseille de réviser aussi tous les autres sujets. On vous suggère de faire cet examen chez vous en vous mettant dans des conditions les plus proches de celles de l'examen (cf ci-dessous). Afin de recevoir d'éventuelles remarques et une évaluation informelle, vous pouvez rendre l'examen le 12 mai 2016 durant la séance d'exercices.

**Durée :** 3 heures

**Grading :** L'examen est divisé en trois parties. Travaillez sur toutes les questions.

- Les questions 1 et 2 contiennent chacun 4 affirmations. Pour chacune de ces affirmations, décidez si elle est est vraie ou fausse en général. Pour chaque affirmation, on compte +1 point si la réponse est correcte, 0 point s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou si il y a plusieurs croix.
- Les questions 3 à 6 sont des questions à choix multiples. Dans chaque question, il n'y a qu'une seule réponse correcte, et on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou si il y a plusieurs croix.
- Pour chacune des questions ouvertes 7 à 11 on compte +8 points au maximum.

**Avant de commencer :**

- Vérifiez que l'examen soit complet. Il doit se composer de 14 pages.
- Écrivez votre nom sur la première page, et mettez votre carte CAMIPRO sur la table.
- Utilisez un stylo de couleur autre que le rouge, et pas de crayon.
- La réponse doit être écrite sous l'exercice, et éventuellement au recto. Elle doit être rédigée d'une manière claire et compréhensible.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, demandez-en à un des assistants.
- Indiquez sur chaque feuille supplémentaire votre nom et l'exercice correspondant.
- Des feuilles de brouillon seront à votre disposition. Elles ne seront pas corrigées.
- Aucune aide n'est permise pendant l'examen. Aucun matériel n'est autorisé.

Bon courage !

Partie 1 - Questions du type vrai/faux

**Question 1**
Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de l'espace euclidien $V$, soit $B^\star = (b_1^\star, \dots, b_n^\star)$ la base orthogonale résultante du procédé de Gram-Schmidt sur $B$, et soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

| Vrai | Faux | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Si $b_n \in \operatorname{span}\{b_1^\star, \dots, b_k^\star\}$, alors forcément $k = n$. |
| ☐ | ☐ | Les sous-espaces $\operatorname{span}\{b_1^\star, \dots, b_k^\star\}$ et $\operatorname{span}\{b_{k+1}, \dots, b_n\}$ sont orthogonaux. |
| ☐ | ☐ | Les sous-espaces $\operatorname{span}\{b_1, \dots, b_k\}$ et $\operatorname{span}\{b_{k+1}^\star, \dots, b_n^\star\}$ sont orthogonaux. |
| ☐ | ☐ | Si on exécute le procédé de Gram-Schmidt sur une permutation des vecteurs de $B$, on obtient une permutation des vecteurs de $B^\star$ (pas forcément la même permutation). |

**Question 2**
Rappel : Une matrice $A \in K^{n\times n}$ est dite diagonalisable en base orthonormée sur le corps $K$, s'il existe une matrice $P \in K^{n\times n}$ orthogonale telle que $P^*AP = D$ où $D \in K^{n\times n}$ est une matrice diagonale.

| Vrai | Faux | |
|---|---|---|
| ☐ | ☐ | Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, diagonalisable en une base orthonormée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement symétrique. |
| ☐ | ☐ | Toute matrice $A \in K^{n\times n}$ symétrique est diagonalisale en base orthonormée sur $K$, où $K$ est un corps. |
| ☐ | ☐ | Toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ admet $n$ valeurs propres réelles distinctes. |
| ☐ | ☐ | Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice inversible diagonalisable en base orthonormée sur $\mathbb{R}$. Alors $A^{-1}$ est aussi diagonalisable en base orthonormée sur $\mathbb{R}$. |

Partie 2 - Questions à choix multiples.

**Question 3**
Soit $V = \mathbb{Z}_2^4$ un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Z}_2$ muni d'un produit scalaire défini par la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $W$ un sous-espace de $V$ engendré par les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

☐ $W$ possède une base orthonormale.

☐ $W$ possède une base orthogonale, mais pas de base orthonormale.

☐ $W \subseteq W^{\perp}$.

☐ $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = 4$.

**Question 4**
Soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par $\langle x, y \rangle = x^T A y$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On dit qu'un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est entier si et seulement si $v_i$ est entier pour tous $i = 1, \ldots, n$.

Laquelle des assertions suivantes est correcte ?

☐ L'indice de positivité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est 3.

☐ Il existe un vecteur entier $v$ non nul tel que $\langle v, w \rangle = 0$ pour tous $w \in V$.

☐ $\langle v, v \rangle \geq 2$ pour tous vecteurs entiers $v$ non nuls.

☐ Il existe un vecteur entier $v$ non nul tel que $\langle v, v \rangle < 2$, mais $\langle w, w \rangle \geq 1$ pour tous vecteurs entiers $w$ non nuls.

**Question 5**
Soit $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 1 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} .$$

Dire pour laquelle des matrices suivantes $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ on a

$$A = P\Lambda P^* ,$$

où $\Lambda$ est une matrice diagonale avec les valeurs propres de $A$ sur la digonale.

☐ Un tel $P$ n'existe pas.

☐ $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & (-i-1)/\sqrt{4} & (3-i)/\sqrt{60} \\ -i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{4} & 5/\sqrt{60} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{4} & (-3-4i)/\sqrt{60} \end{pmatrix}.$

☐ $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

☐ $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -i/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$

---

**Question 6**
Combien y a-t-il de paires de matrices congruentes parmi les matrices $A, B$ et $C$ ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} , C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Réponse :

☐ 0

☐ 1

☐ 2

☐ 3

Part 3 - Questions ouvertes

**Question 7**
Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et soit $V^*$ l'espace dual de $V$. Soit $E$ une base de $V$ et $E^*$ la base canonique correspondante de $V^*$.

(i) Montrer que pour chaque $v \in V$ et $f \in V^*$, $f(v) = [f]_{E^*}^T [v]_E$.

Soit $F$ une autre base de $V$ et $F^*$ la base canonique correspondante de $V^*$. Finalement, soit $P_{EF}$ la matrice de transformation de la base $E$ à la base $F$, c'est-à-dire $P_{EF}$ est une matrice qui satisfait $[x]_F = P_{EF}[x]_E$ pour tout $x \in V$ ; et similairement soit $P_{E^*F^*}$ la matrice qui satisfait $[f]_{F^*} = P_{E^*F^*}[f]_{E^*}$ pour tous $f \in V^*$.

(ii) Montrer que $P_{EF}^{-1} = P_{E^*F^*}^T$.

**Solution:**

*Au besoin, veuillez utiliser le verso de cette page*

**Solution:**

*Au besoin, veuillez y joindre une feuille séparée*

**Question 8**

On considère l'espace $P$ des polynômes, muni du produit scalaire

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx.$$

L'espace $P$ muni de ce produit scalaire forme un espace euclidien (pas besoin de le montrer).

1. Pour un polynôme $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$, montrer que $\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx = \sum_{i=0}^k i!a_i$.
   (Indice : utiliser la méthode d'intégration par parties.)
2. Pour le sous-espace $P_2$ de polynômes de degré au plus 2, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour transformer la base $(1, x, x^2)$ de $P_2$ dans une base orthonormale.

**Solution:**

*Au besoin, veuillez utiliser le verso de cette page*

**Solution:**

*Au besoin, veuillez y joindre une feuille séparée*

**Question 9**
Soit $V$ un espace vectoriel de dimension finie $n$ sur un corps $K$ et soient $f_1, \ldots, f_r \in V^* \setminus \{0\}$ linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker(f_1) \cap \ldots \cap \ker(f_r)) = n - r.$$

**Solution:**

*Au besoin, veuillez utiliser le verso de cette page*

**Solution:**

*Au besoin, veuillez y joindre une feuille séparée*

**Question 10**
Pour chaque matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on appelle le couple

$$\Sigma_A := (p_A, n_A)$$

la *signature* de $A$, où $p_A$ et $n_A$ sont respectivement les indices de positivité et de négativité de $A$. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices symétriques telles que $rang(A) = rang(B)$. Montrer que $A$ est congruente à $B$ si et seulement si $\Sigma_A = \Sigma_B$.

**Solution:**

*Au besoin, veuillez utiliser le verso de cette page*

**Solution:**

*Au besoin, veuillez y joindre une feuille séparée*

**Question 11**

Soit $V$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que pour tous $v \in V$, $\langle v, v \rangle \geq 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel $d \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ et une application linéaire $F : V \to \mathbb{R}^d$ telle que $\langle u, v \rangle = F(u) \cdot F(v)$ pour tous $u, v \in V$, où $\cdot$ dénote le produit scalaire standard.

**Solution:**

*Au besoin, veuillez utiliser le verso de cette page*

**Solution:**

*Au besoin, veuillez y joindre une feuille séparée*