Prof. Friedrich Eisenbrand 14 avril 2017

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2017

Examen blanc

Question	Vrai/Faux (4pts)		QCM (3pts)				Exercice (8pts)					Total	Note
	1	2	1	2	3	4	1	2	3	4	5		
Points													

Durée: 3 heures

Grading: L'examen est divisé en trois parties. Travaillez sur toutes les questions.

- Les questions *Vrai/Faux* contiennent chacune 4 affirmations. Pour chacune de ces affirmations, décidez si elle est vraie ou fausse en général. Pour chaque affirmation, on compte +1 point si la réponse est correcte, 0 point s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou s'il y a plusieurs croix.
- Les questions *QCM* sont des questions à choix multiples. Dans chaque question, il n'y a qu'une seule réponse correcte, et on compte +3 points si la réponse est correcte, 0 s'il n'y a pas de réponse, et -1 point si la réponse est fausse, ou s'il y a plusieurs croix.
- Pour chacune des questions ouvertes, on compte +8 points au maximum.

Avant de commencer :

- Utilisez un stylo de couleur autre que le rouge, et pas de crayon.
- La réponse doit être écrite sous l'exercice, et éventuellement au recto. Elle doit être rédigée d'une manière claire et compréhensible.
- Si vous avez besoin de feuilles supplémentaires, indiquez sur chaque feuille supplémentaire votre nom et l'exercice correspondant.
- Des feuilles de brouillon seront à votre disposition. Elles ne seront pas corrigées.
- Aucune aide n'est permise pendant lexamen. Aucun matériel n'est autorisé.

L'objectif de cet examen blanc est de vous donner une idée de ce qu'aura l'air l'examen final. L'examen final aura le même format, et aura une durée de 3 heures. Les exercices de cet examen couvrent seulement une partie des sujets du cours; par contre, on vous conseille de réviser aussi tous les autres sujets. On vous suggère de faire cet examen chez vous en vous mettant dans des conditions les plus proches de celles de l'examen (cf ci-dessus). Afin de recevoir d'éventuelles remarques et une évaluation informelle, vous pouvez rendre l'examen le 27 avril 2017 durant la séance d'exercices.

Bon courage !

Vrai/Faux 1 (4 pts)**.**

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est correcte ou incorrecte.

Vrai	Faux	
☐	☐	Soit $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V. Il existe une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que B est une base orthonormale de V par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
☐	☐	Une forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ est non-dégénérée à gauche si et seulement si elle est non-dégénérée à droite.
☐	☐	Une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ est non-dégénérée à gauche si et seulement si elle est non-dégénérée à droite.
☐	☐	Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire. S'il existe $u \in V$ tel que $\langle u, v \rangle = 0 \; \forall \; v \in V$, alors $\langle v, u \rangle = 0 \; \forall \; v \in V$.

Vrai/Faux 2 (4 pts)**.**

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour n'importe quel sous-espace vectoriel U de V, on denote $U^\perp = \{v \in V : \langle u, v \rangle = 0 \; \forall \; u \in U\}$. Soit W un sous-espace de V. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est correcte ou incorrecte.

Vrai	Faux	
☐	☐	$(W^\perp)^\perp \subseteq W$.
☐	☐	$W \subseteq (W^\perp)^\perp$.
☐	☐	Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée, $(W^\perp)^\perp \subseteq W$.
☐	☐	Si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est non-dégénérée, $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

QCM 1 (3 pts)**.**
Combien y a-t-il de paires de matrices congruentes sur $\mathbb{R}$ parmi les matrices A, B et C ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réponse:

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

QCM 2 (3 pts)**.**
Soit $V = \mathbb{R}^4$ et soient $v, v_1, v_2 \in V$ définis comme

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Soit $d = \min_{u \in span\{v_1, v_2\}} ||v - u||$. Laquelle des assertions suivantes est correcte?

- ☐ $d = \sqrt{24}$.
- ☐ $d = \sqrt{12}$.
- ☐ $d = \sqrt{33}$.
- ☐ $d = \sqrt{3}$.

QCM 3 (3 pts)**.**
Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des assertions suivantes est correcte?

□ A est une matrice définie positive.

□ A est une matrice semi-définie positive, mais pas définie positive.

□ A est une matrice définie négative.

□ A n'est ni semi-définie positive, ni semi-définie négative.

QCM 4 (3 pts)**.**

Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Laquelle des suivantes est une décomposition en valeurs singulières de A?

□

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

□

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

□

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{8}{5} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1 (8 pts)**.**

Soit $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ l'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré au plus 2. On définit $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in V^*$ par :

$$\psi_1(p(t)) = \int_0^1 p(t)dt\,, \qquad \psi_2(p(t)) = p'(1)\,, \qquad \psi_3(p(t)) = p(0)\,,$$

pour tout $p(t) \in \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$. $F^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ est une base de V^*, et vous pouvez utiliser ce fait sans preuve.

(i) Trouver la base F de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ telle que sa base duale F^* soit égale à (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

(ii) Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ et soit $E^* = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ sa base duale. Exprimer la base E^* par rapport à F^*. Donner les matrices $P_{E^*F^*}$ et $P_{F^*E^*}$.

Solution:

Exercice 2 (8 pts)**.**

Soit $V = \mathbb{Z}_3^4$, soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}_3$ la forme bilinéaire standard $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i \pmod 3$ et soit

$$W = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Trouver une base orthogonale de W.

(ii) Trouver une base orthogonale de $W^\perp$.

(iii) Montrer que $V = W \oplus W^\perp$.

Solution:

Exercice 3 (8 pts)**.**

(i) Soient $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique, $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice orthogonale, et $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice diagonale telle que $P^T AP = D$. Soient $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^n$ les colonnes de P et $B = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que B est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ constituée par des vecteurs propres de A.

Note: L'orthogonalité est définie par le produit scalaire standard.

(ii) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $P^T AP = D$.

Solution:

Exercice 4 (8 pts).

Soient $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ des matrices hermitiennes. Montrer que

(i) La matrice $A+B$ est hermitienne.

(ii) Si A et B sont définies positives, la matrice $A+B$ est définie positive.

(iii) Si A est inversible, la matrice A^{-1} est hermitienne.

(iv) Si A est inversible et définie positive, la matrice A^{-1} est définie positive.

(v) Si $AB = BA$, la matrice AB est hermitienne.

Solution:

Exercice 5 (8 pts)**.**

(i) Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Montrer que les valeurs singulières de A sont le mêmes que les valeurs singulières de A^*.

(ii) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donner une décomposition en valeurs singulières pour A et A^T.

Solution: