Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

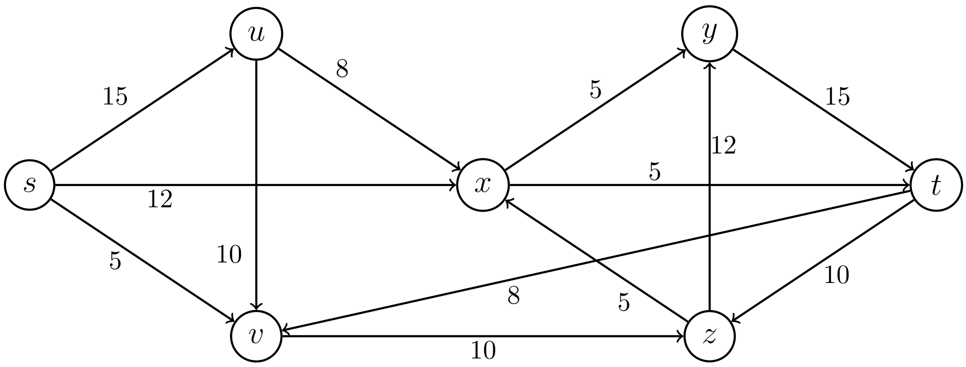
Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 12 19 mai 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

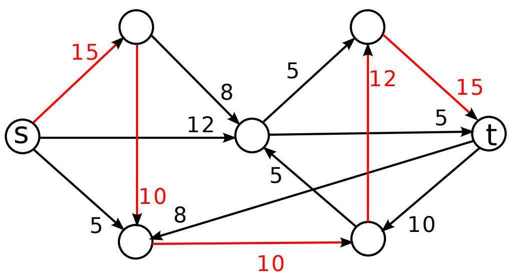
Considérer le réseau suivant :



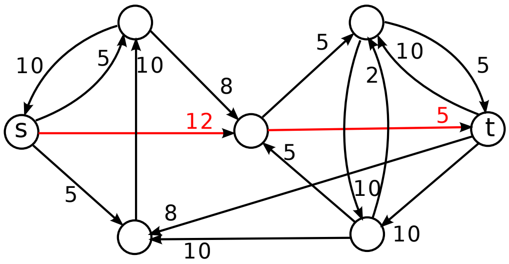
Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin améliorant choisi.
Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Solution

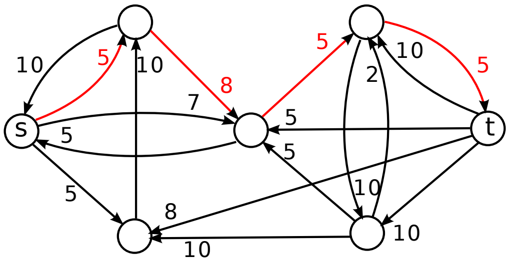
Initialement, le graphe résiduel est égal au réseau original. Le chemin améliorant de s à t que l'on a choisi est marqué en rouge. On augmente le flot de 10 unités :



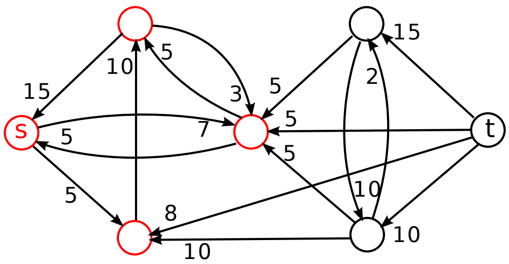
On obtient le graphe résiduel suivant et on choisit le chemin améliorant en rouge. On augmente le flot de 5 unités :



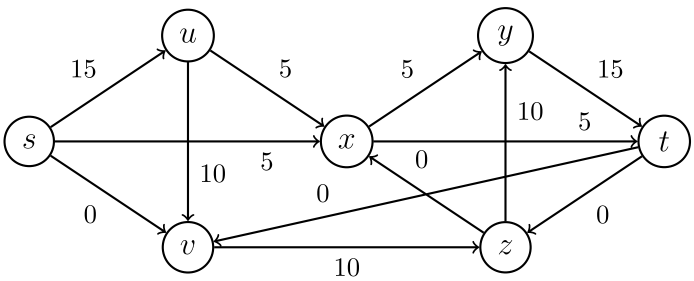
On obtient le graphe résiduel suivant et on choisit le chemin améliorant en rouge. On augmente le flot de 5 unités :



On obtient le graphe résiduel suivant :

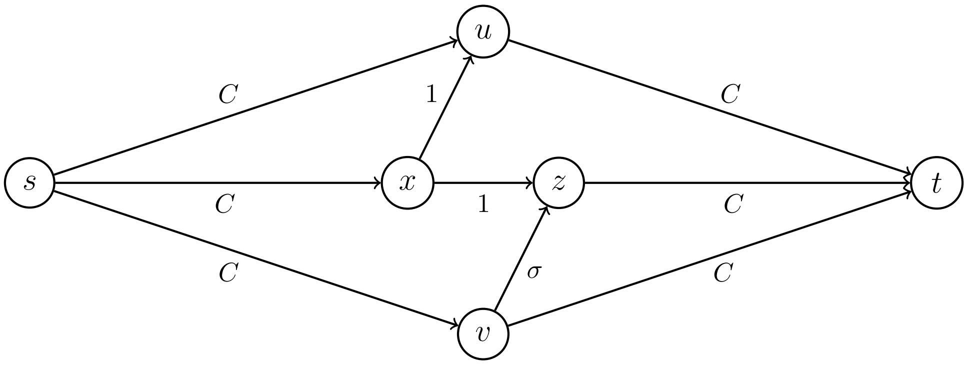


t n'est plus accessible depuis s dans le graphe résiduel. Donc le flot est maximal et sa valeur est 20. L'ensemble $U = \{s, u, v, x\}$ qui définit la coupe minimale de s-t est marquée en rouge. Le flot maximal est indiqué dans le graphe suivant :



Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Considérer le réseau suivant, où C est une très grande capacité et $\sigma < 1$ un nombre positif.



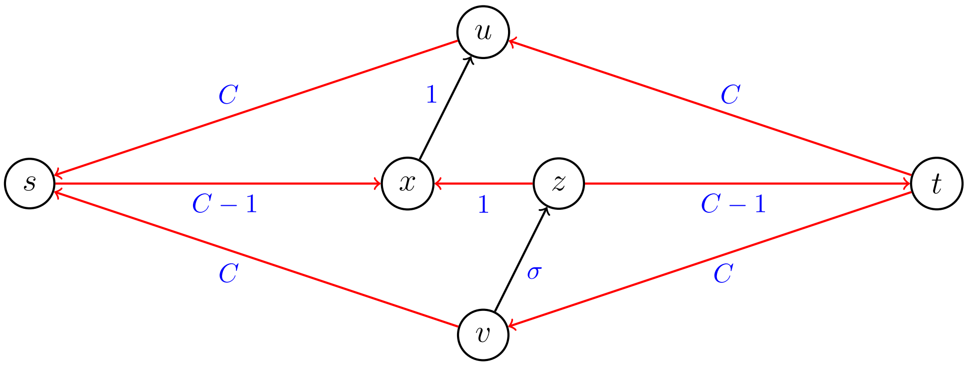
Il s'agit de démontrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson ne termine pas pour un certain choix de σ.
– Quel est le flot maximal de s à t ? Quelle est sa valeur ?
– Soit $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Trouver une suite des chemins améliorants qui concourt à un flot de valeur 7 au plus.
Donner tous les chemins améliorants utilisés et les graphes résiduels correspondants.

Indication : Pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$, essayer de revenir toujours à des capacités sous forme $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe résiduel après quelques itérations améliorantes.

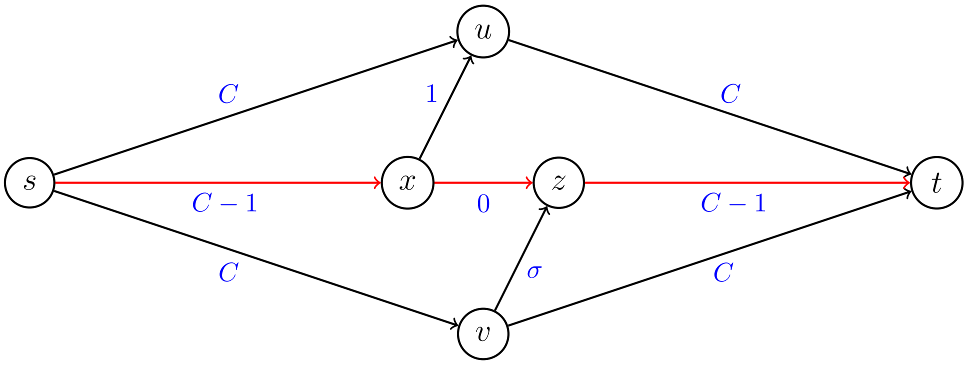
Solution

Observer que $\sigma = \phi - 1$, où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Comme $\phi^2 = \phi + 1$, on obtient $\sigma^2 = (1-\phi)^2 = \phi^2 - 2\phi + 1 = 2 - \phi = 1 - \sigma$.

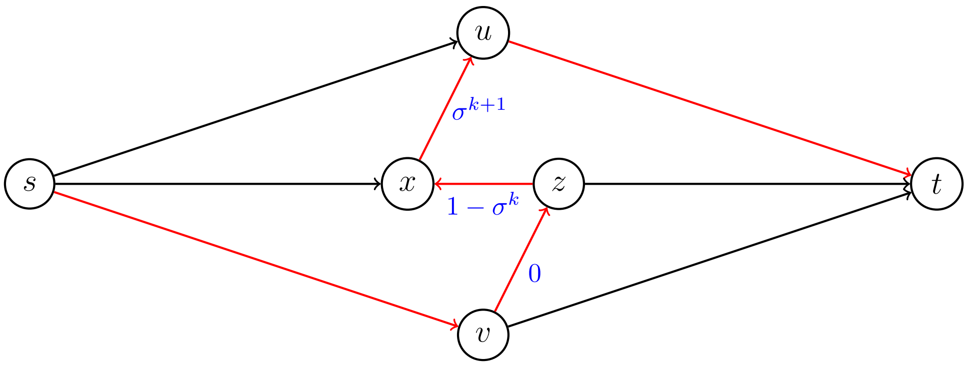
La valeur du flot maximal est $1+2C$. Voici le graphe résiduel après l'augmentation le long des chemins rouges.



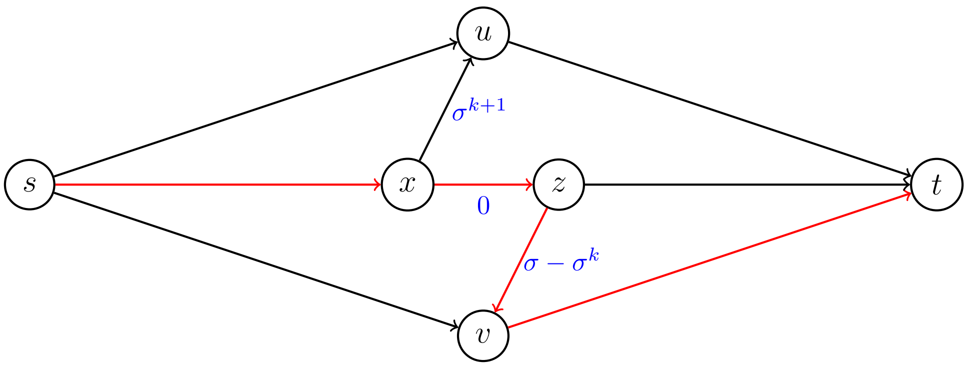
La coupe définie par $\{s, x\}$ a une capacité de $1 + 2C$, donc le flot est maximal. Considérons maintenant un choix des chemins améliorants moins avantageux. On commence avec le chemin s-x-z-t et on obtient le graphe résiduel suivant :



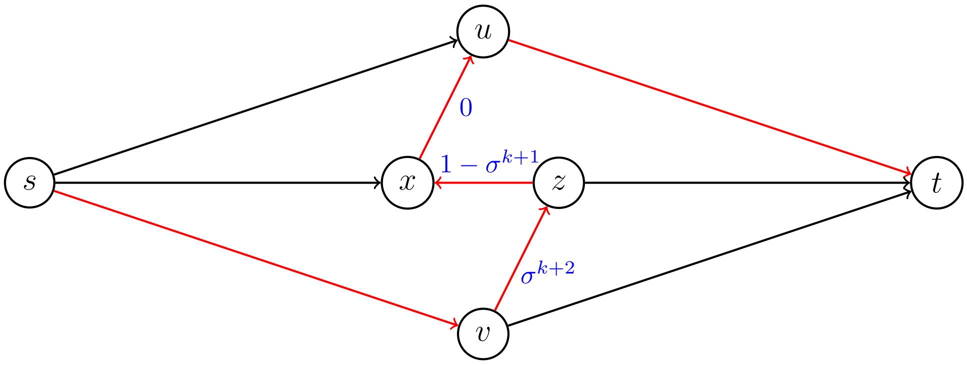
Observer que l'on a des capacités $\sigma^0, 0, \sigma$ pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$. Comme indiqué, on va se concentrer sur ces arcs.
Supposons donc que les capacités sont $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour un $k \in N$. Nous démontrons maintenant comment on peut obtenir des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$ en utilisant une suite de 4 chemins améliorants.
D'abord, on choisit le chemin améliorant suivant (appelé A) :



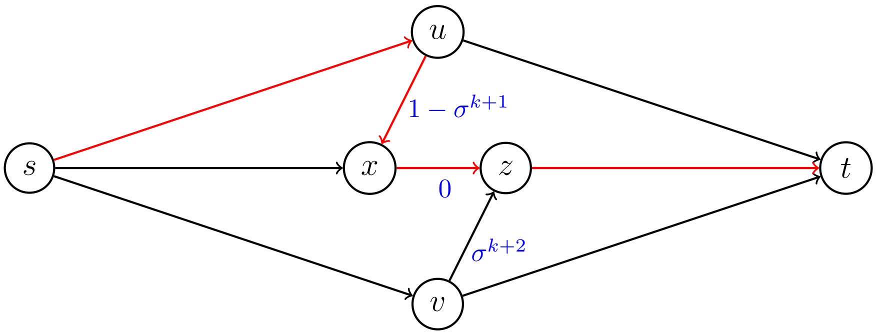
On augmente alors le flot de σ^k et on obtient des capacités $\sigma^{k+1}, \sigma^k, 0$.
Le deuxième chemin B augmente le flot aussi de σ^k et on obtient des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^k$:



On choisit encore le chemin A et on obtient une augmentation de σ^{k+1} et des capacités $0, \sigma^{k+1}, \sigma^{k+2}$:



Finalement, on prend un chemin améliorant P pour obtenir une augmentation de σ^{k+1} et des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$:



Donc on augmente la valeur du flot de $2\sigma^k + 2\sigma^{k+1}$ en passant de $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ à $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$. On obtient pour la valeur du flot :

$$value(f) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k = 1 + \frac{2}{1-\sigma} < 7$$

Observer que la limite est donc strictement plus petite que la valeur du flot optimal (si $C \geq 3$). Alors, on a une suite infinie des chemins améliorants et l'algorithme de Ford-Fulkerson ainsi ne termine pas.

Exercice 3

Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est *connexe* s'il existe un chemin de u à v dans G pour chaque couple de sommets $u, v \in V$.
Un graphe connexe est k-arête-connexe s'il est possible de le déconnecter en supprimant k arêtes et si k est minimal.
Montrer comment on peut déterminer le nombre k d'un graphe $G = (V, E)$ (tel que G est k-arête-connexe) en appliquant un algorithme de flot à $|V|$ réseau au plus, où chacun est constitué de $\mathcal{O}(V)$ sommets et $\mathcal{O}(E)$ arcs.

Indication : Considérer le graphe orienté $D = (V, A)$, où on a des arcs (u, v) et (v, u) pour chaque arête $\{u, v\}$ (c-à-d $A = \{(u, v) : \{u, v\} \in E\}$). Y a-t-il une relation entre le nombre k de G et les coupes minimales dans G ?

Solution

Soit $\delta(U) = \{e \in E \ : \ e = \{u, v\}$ avec $u \in U, v \notin U\}$ pour le graphe non-orienté $G = (V, E)$.

Supposons que G est k-arête-connexe.
On va démontrer que

$$k = \min_{U \subset V} |\delta(U)|. \tag{1}$$

Pour $k \leq \min_{\emptyset \subset U \subset V} |\delta(U)|$, observer que pour chaque $\emptyset \subset U \subset V$, G n'est plus connexe si l'on supprime tous les arcs dans $\delta_G(U)$.
Pour l'autre direction, c-à-d $k \geq \min_{\emptyset \subset U \subset V} |\delta_G(U)|$, soit $M \subseteq E$, $|M| = k$, un ensemble d'arcs tels que $G' = (V, E \backslash M)$ n'est plus connexe. De plus, soit $s \in V$ et soit U l'ensemble des sommets accessible depuis s dans G'. Alors $\delta_G(U) \subseteq M$ et donc $\min_{\emptyset \subset U \subset V} |\delta_G(U)| \leq k$.

On obtient l'égalité (1). Ainsi, il s'agit de trouve une coupe $\delta_G(U)$ de cardinalité minimale dans G.
Considérer le graphe orienté pondéré $D = (V, A)$, où $A = \{(u, v) : \{u, v\} \in E\}$ et $c : A \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $c(a) = 1\ \forall a \in A$. Observer que pour tout $U \subseteq V$ on a $|\delta_G(U)| = |\delta_D^{out}(U)| = |\delta_D^{in}(U)|$. Donc il est suffisant de trouver une coupe de poids minimal dans D.
Soit $\emptyset \subset U \subset V$ tel que $|\delta_G(U)| = |\delta_D^{out}(U)|$ est minimale. On choisit un sommet $s \in V$ arbitrairement. Si $s \in U$, $\delta_D^{out}(U)$ est une coupe s-t pour chaque $t \in V \backslash U$. Si $s \notin U$, on a que $\delta_D^{out}(V \backslash U)$ est une coupe s-t pour chaque $t \in U$. Comme $|\delta_D^{out}(V \backslash U)| = |\delta_D^{in}(U)| = |\delta_D^{out}(U)|$, $\delta_D^{out}(V \backslash U)$ est aussi une coupe de poids minimal.
Puisque la capacité d'une coupe minimale de s-t est égale à la valeur du flot maximal de s à t, on obtient que l'on peut trouver la coupe de poids minimal (et donc le nombre k) en résolvant le problème du flot maximal de s à t pour tous $s, t \in V$ avec $t \neq s$.

Exercice 4

Donner une manière de trouver un couplage de cardinalité maximale dans un graphe biparti qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$ en utilisant des flots.

Solution

Soit A et B une partition des sommets de G en deux stables. Orienter toutes les arêtes vers l'ensemble B.
On ajoute des sommets artificiels s et t et des arcs (s, v) pour tout $v \in A$ et (v, t) pour tout $v \in B$. On choisit une capacité de 1 pour chaque arc. Soit D le graphe obtenu avec $n = |A| + |B| + 2$ sommets et $m = |A| + |B| + |E|$ arcs, où E est l'ensemble d'arêtes du graphe biparti.
Observer que tout couplage de cardinalité k dans G induit un flot de s à t dans D avec une valeur k et vice versa.
Comme la valeur du flot maximal est bornée par n (et que les capacités sont entières), il y a n itérations améliorantes au plus. Comme vu en cours, chaque recherche d'un chemin améliorant peut être implémentée en temps $\mathcal{O}(m)$. Alors l'algorithme du flot maximal s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$.