Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 11 — 12 mai 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Supposons que vous possédez n animaux différents et deux étables. Malheureusement, quelques animaux aiment en dévorer d'autres lorsque vous n'êtes pas présent. Il s'agit donc d'assigner les animaux aux étables avec considération. Vous connaissez m relations de la forme « u dévore v », où u et v sont des animaux.
Trouver un algorithme qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(n+m)$ et qui trouve une assignation fiable des animaux aux étables, si possible, ou donne un certificat d'inadmissibilité, sinon.

Indication : Algorithme de parcours en largeur (Breadth-first-search).

Solution

Considérer le graphe orienté $G = (V, A)$, où chaque sommet représente un animal et où l'on a des arcs (u, v) et (v, u) pour chaque relation « u dévore v ». Observer qu'une assignation aux étables est fiable si et seulement s'il existe une partition des sommets en deux ensembles V_1 et V_2 telle que pour tout $(u, v) \in A$, u et v appartiennent à des ensembles différents.
En d'autres termes, il existe une assignation fiable si et seulement si le graphe non-orienté sous-jacent $G' = (V, E)$, où $E := \{\{u, v\} \ : \ (u, v) \in A\}$, est biparti.
Considérer l'algorithme suivant :

function FULLBFS($G = (V, A)$)
    $D[v] \leftarrow \infty \ \ \forall v \in V$.
    for all $v \in V$ **do**
        if $D[v] = \infty$ **then**
            $D[v] \leftarrow 0$
            BFS($G,\ v,\ D$)
        end if
    end for
    return D
end function

On applique l'algorithme au graphe G. Soit D le vecteur retourné. On définit

$$V_1 := \{v \in V \ : \ D[v] \text{ est pair}\}$$

et

$$V_2 := \{v \in V \ : \ D[v] \text{ est impair}\}.$$

On va montrer que V_1 et V_2 est une bipartition si et seulement si une assignation fiable existe.
Si une assignation fiable en ensembles V_1 et V_2 existe, le graphe G' est trivialement biparti.
Supposons donc que V_1 et V_2 donnent une assignation inadmissible, c'est-à-dire qu'il y a une arête $e \in E$ tel que $e \subseteq V_1$ (ou $e \subseteq V_2$, alors on échange les rôles de V_1 et V_2). Il s'agit de démontrer que G' n'est pas biparti. Il est suffisant de trouver un cycle de longueur impaire dans G' (on omet la preuve de cette affirmation).
Soit $a = (u, w) \in A$ un arc correspondant à l'arête e. Alors w est accessible depuis u et vice versa. Donc u et w ont obtenu leur étiquette D au cours du même appel à BFS à la ligne 6. Il existe ainsi un sommet v tel que l'on a un chemin M de v à u de longueur $D[u]$ et un chemin M' de v à w de longueur $D[w]$. Comme $u, w \in V_1$, on a $D[u] \equiv D[w] \mod 2$ et donc $D[u] + D[w]$ est *pair*. Soit $M \Delta M'$ l'ensemble des arcs contenus dans soit M soit M', mais pas dans $M \cap M'$. Comme $D[u] + D[w]$ est pair, le nombre des arcs dans cet ensemble est aussi pair. De plus, a n'est contenue ni dans M ni dans M' (sinon, u et w ne seraient pas dans le même V_i). On conclut que $(M \Delta M') \ \cup \ \{a\}$ définit un cycle de longueur impaire dans le graphe non-orienté G'.

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté avec des poids $c : A \to \mathbb{R}$ et un potentiel de sommets $f : V \to \mathbb{R}$. f est *admissible* si $c(a) \geq f(y) - f(x)$ pour tout arc $a = (x, y) \in A$.
Montrer qu'il existe un potentiel admissible associé à D si et seulement si D ne contient pas de cycle de poids négatif.
Utiliser dualité !

Indication : La matrice d'incidence arcs-sommets contient une ligne pour chaque arc dont une entrée -1 pour l'extrémité initiale et 1 pour l'extrémité finale.

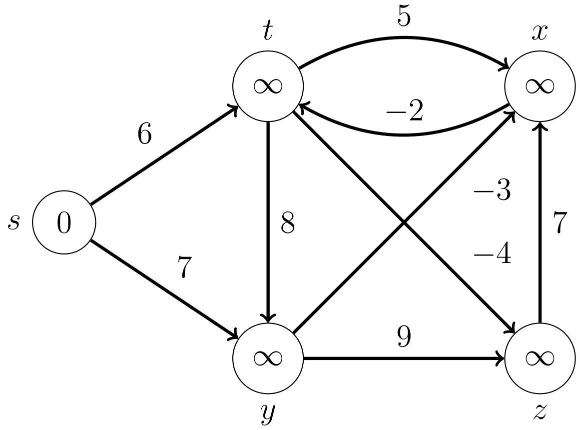
Solution

Considérons B, la matrice d'incidence arcs-sommets comme décrit en indication. Les potentiels admissibles pour D sont les points admissibles du PL $\max\{0\colon f \in \mathbb{R}^{|V|}, Bf \leq c\}$. Son dual $\min\{c^T z\colon z \geq 0, z^T B = 0\}$ contient tous les cycles dans D comme points admissibles, car chaque sommet est consideré un nombre pair de fois comme extrémité initiale et un nombre pair de fois comme extrémité finale dans un cycle. Observer que B^T est TUM par l'exercice 5 de la série 9 et donc que le polyèdre $\{z \in \mathbb{R}^{|A|}\colon \begin{pmatrix} B^T \\ -B^T \end{pmatrix} z \leq 0, z \geq 0\}$ est intégral par l'exercice 1 de la série 8 et le théorème de Hoffman-Kruskal.

On obtient donc l'affirmation voulue directement du lemme de Farkas (voir l'exercice 3 de la série 6). Comme le PL dual est trivialement admissible ($z = 0$), on a que le PL primal est admissible si et seulement si le PL dual est borné. En d'autres termes, s'il existe un potentiel admissible, le PL dual est borné, donc en particulier chaque cycle est de poids positif. Si l'on n'a pas de potentiel admissible, on trouve un sommet du PL dual avec une valeur de l'objectif négative. Comme chaque sommet est intégral (voir l'exercice 3 de la série 9), il correpond à un cycle (qui est de poids négatif) dans D.

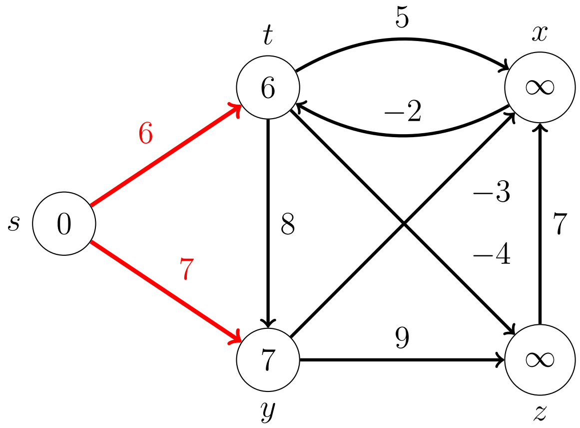
Exercice 3

Considérer le graphe orienté figuré ci-dessous avec des étiquettes de distance.
Exécuter l'algorithme de Bellman-Ford en utilisant s comme source. Pour tout $k = 1, \ldots, 5$: dessiner le graphe en utilisant les f_k pour étiquettes de distance. Pour chaque sommet, marquer l'arc qui atteint le minimum de l'étape (ii) (s'il existe).
Les étiquettes pour $k = 0$ sont déjà notées sur le graphe.

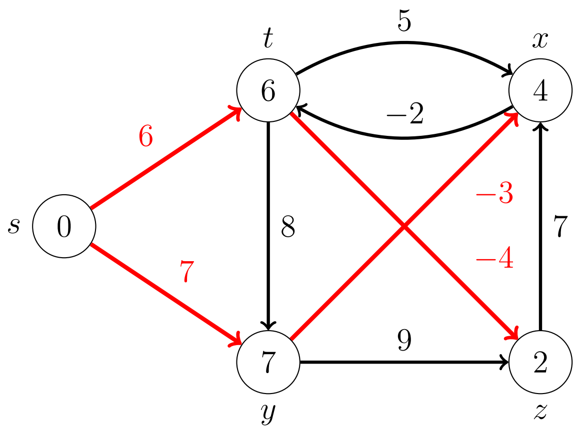


Solution

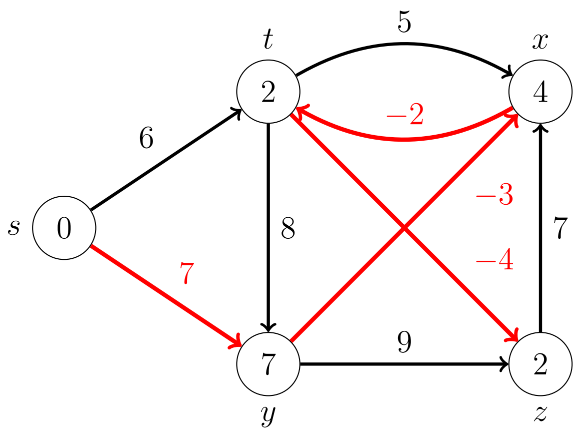
Après la première itération :



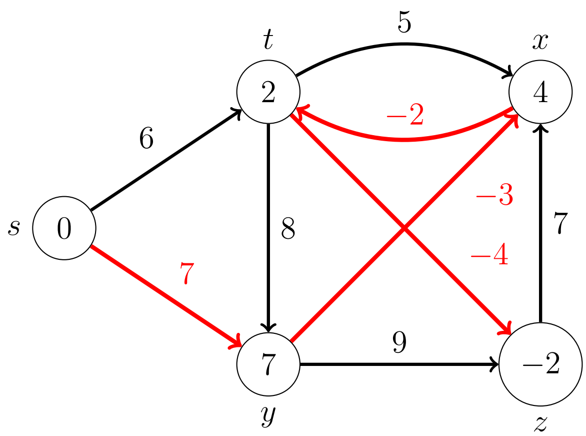
Après l'itération 2 :



Après l'itération 3 :



Après l'itération 4 :



Exercice 4

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté avec une fonction de distance $c : \ A \ \to \mathbb{R}$.

Considérer la modification suivante de l'algorithme de Bellman-Ford : On maintient un vecteur de *précédents* $\Pi \in V^V$, c'est-à-dire que pour $v \in V$, on dit que $\Pi(v) \in V$ est le *précédent* de v.

Initialement, on pose $\Pi(v) := \texttt{NUL}$ pour tout $v \in V$. À l'étape (ii) de l'algorithme, lors du calcul de $f_{k+1}(v) = f_k(u) + c(u, v)$ pour un $u \in V$, on pose $\Pi(v) := u$.

Montrer comment on peut utiliser cet algorithme modifié pour trouver soit un potentiel admissible soit un cycle de poids négatif.

Solution

On ajoute un sommet s comme source artificielle et des arcs (s, v) de distance 0 pour tout $v \in V$ (afin que tous les sommets soient accessibles depuis s). On applique l'algorithme modifié de Bellman-Ford à ce graphe, même si un cycle de poids négatif peut exister. Si les nombres f_n donnent un potentiel admissible, on a terminé.

Sinon, soit $a = (x, y)$ un arc avec $f_n(y) > f_n(x) + c(a)$. On va montrer que la suite $y, x, \Pi(x), \Pi(\Pi(x)), \ldots$ contient un cycle de poids négatif. Observer que $f_n(x) \neq f_{n-1}(x)$, c'est-à-dire que l'étiquette de distance de x a changé à la dernière itération de l'étape ii) de l'algorithme. Donc $f_n(\Pi(x))$ a changé au cours des deux dernières itérations, $f_n(\Pi(\Pi(x)))$ au cours des trois dernières itérations, etc. Comme $f_n(s) = \cdots = f_0(s)$, s ne fait pas partie des $|V|$ premières éléments de la suite ci-dessus, donc il existe un sommet v^* qui apparaît au moins deux fois. Alors, on trouve un cycle dans cette suite. Son poids est négatif, car les étiquettes de distance sont strictement décroissantes quand elles sont changées. En d'autres termes, chaque arc $a' = (v, w)$ dans l'ensemble $F := \{(v, w) \in A \colon v = \Pi(w)\} \cup \{(x, y)\}$ satisfait $c(a') \leq f_n(w) - f_n(v)$. L'addition de ces inégalités pour la suite et l'arc $a = (x, y)$ ci-dessus nous donne que le poids du cycle est strictement négative.