Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 10 05 mai 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Démontrer que l'algorithme du simplexe primal termine si le système $Ax \leq b$ de $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$ est primal non-dégénéré et montrer que l'algorithme du simplexe est correct.

Indication : En cas de terminaison avec une solution optimale, quelle est la valeur objectif du z^* dual-admissible ?

Solution

Comme $Ax \leq b$ est primal non-dégénéré, on obtient $|\{i \in \{1, \dots, m\} \setminus T \colon a_i x_T^* = b_i\}| = 0$ pour chaque base admissible T et sa solution associée x_T^*. Donc la valeur $\min\{(b_j - a_j x_T^*)/a_j d_{iT} \colon j \in J\}$ est strictement positive. Ainsi la valeur de l'objectif est strictement augmentée à chaque itération du simplexe primal. C'est pourquoi chaque sommet du polyèdre décrit par $Ax \leq b$ est considéré une fois au plus lors de l'algorithme. Le nombre de sommets étant fini, l'algorithme du simplexe termine.
En cas de terminaison avec une solution $x_{T^*}^*$, le vecteur donne une combinaison conique des lignes de A_{T^*} pour l'objectif c. Donc on obtient $c^T x_{T^*}^* = zA_{T^*} x_{T^*}^* = zb_{T^*}$. Par la dualité forte, $x_{T^*}^*$ est une solution optimale du PL primale (Observer que z augmenté par des zéros est une solution admissible du PL dual).
Dans le cas non-borné on a $Ad_{iT} \leq 0$ pour une base T et $i \in T$ de sorte que $z_{f_T(i)} < 0$. Donc $x_T^* + \lambda d_{iT}$ est une solution admissible pour tout $\lambda \geq 0$ et $c^T d_{iT} = zA_T d_{iT} = -z_{f_T(i)} > 0$.
Si le système $Ax \leq b$ n'est pas admissible, on ne peut pas trouver une base admissible initiale, donc l'algorithme du simplexe primal est correct.

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Soient T et T' deux bases admissibles voisines l'une de l'autre. Montrer que
– x_T^* et $x_{T'}^*$ sont des sommets de $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$

– que l'enveloppe convexe $conv\{x_T^*, x_{T'}^*\} = \{\lambda x_T^* + (1-\lambda)x_{T'}^* \colon \lambda \in [0,1]\}$ est une face de P

Solution

– Comme T et T' sont des bases admissibles, on a $x_T^* \in P$ et $x_{T'}^* \in P$. En plus, $|T| = n = |T'|$ et $A_T x_T^* = b_T$ et $A_{T'} x_{T'}^* = b_{T'}$, donc x_T^* et $x_{T'}^*$ sont des sommets de P (voir l'exercice 1 de la série 9).
– Soient $c^T = \mathbf{1}^T A_{T' \cap T}$ et $\beta = \mathbf{1}^T b_{T' \cap T}$. On écrit $H := \{x \in \mathbb{R}^n \colon c^T x = \beta\}$. On a $conv\{x_T^*, x_{T'}^*\} \subseteq H \cap P$, car

$$c^T(\lambda x_T^* + (1-\lambda)x_{T'}^*) = \lambda c^T x_T^* + (1-\lambda)c^T x_{T'}^* = \beta \qquad \forall \lambda \in [0,1]$$

Soit $y \in H \cap P$. Comme y est une solution admissible et optimale par rapport à c, y satisfait le système $A_{T \cap T'} x = b_{T \cap T'}$. Ce système contient $n-1$ lignes qui sont linéairement indépendantes, donc l'ensemble de solutions est de dimension 1. Comme $conv\{x_T^*, x_{T'}^*\}$ est contenu dans cet ensemble, y se trouve sur la droite par x_T^* et $x_{T'}^*$. Supposant $y \notin conv\{x_T^*, x_{T'}^*\}$, on obtient une contradiction en utilisant la caractérisation (iii) d'un sommet de l'exercice 1 de la série 9.

Exercice 3

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ un polyèdre non-vide et primal non-dégénéré. Considérer le graphe G_P défini en cours sur les bases admissibles de P. Soit c un vecteur tel que le PL $\max\{c^T x \colon x \in P\}$ est borné. Soit $y \in V(G_P)$ avec $c^T y < \max\{c^T x \colon x \in P\}$. Montrer que l'on peut trouver une arête $\{y, z\} \in E(G_P)$ telle que $c^T y < c^T z$.

En d'autres termes, pour y une solution de base associée à une base T avec une valeur sous-optimale, démontrer qu'il existe une solution de base z associée à une base voisine T' telle que $c^T y < c^T z$.

Solution

Soit T la base dont y est la solution associée (voir l'exercice 1 de la série 9). Comme $y \in P$, T est une base admissible. On applique maintenant une itération de l'algorithme du simplexe primal avec la base initiale T (y n'est pas optimal). P étant primal non-dégénéré, le simplexe primal trouve une base admissible voisine T' dont la solution associée $z := x_{T'}^*$ a une valeur de l'objectif $c^T z > c^T y$.

Exercice 4

Soient $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{Q}_+$, $x, y \in \mathbb{Q}_+^n$, $A \in \mathbb{Q}_+^{m \times n}$. Montrer que

- $\text{size}(r_1 \cdot \cdots \cdot r_n) \leq \text{size}(r_1) + \cdots + \text{size}(r_n)$
- $\text{size}(r_1 + \cdots + r_n) \leq 2(\text{size}(r_1) + \cdots + \text{size}(r_n))$
- $\text{size}(x^T y) \leq 2(\text{size}(x) + \text{size}(y))$
- $\text{size}(\det A) \leq 2\text{size}(A)$

Solution

- On a $\text{size}(r) = \text{size}(p) + \text{size}(q)$ pour un nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ avec p, q sans facteur commun. Avec $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ on obtient

$$\begin{aligned}\text{size}(r_1 \cdot \cdots \cdot r_n) &= \text{size}(p_1 \cdot \cdots \cdot p_n) + \text{size}(q_1 \cdot \cdots \cdot q_n) \\ &\leq \text{size}(p_1) + \cdots + \text{size}(p_n) + \text{size}(q_1) + \cdots + \text{size}(q_n) \\ &\leq \text{size}(r_1) + \cdots + \text{size}(r_n)\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}\text{size}(r_1 + \cdots + r_n) &\leq \text{size}(q_1) + \cdots + \text{size}(q_n) + \text{size}((p_1 + \cdots + p_n) \cdot (q_1 \cdot \cdots \cdot q_n)) \\ &\leq \text{size}(r_1) + \cdots + \text{size}(r_n) + \text{size}(r_1) + \cdots + \text{size}(r_n)\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}\text{size}(x^T y) = \text{size}\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) &\leq 2 \sum_{i=1}^n \text{size}(x_i y_i) \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^n \text{size}(x_i) + 2 \sum_{i=1}^n \text{size}(y_i) = 2(\text{size}(x) + \text{size}(y)) - 4n\end{aligned}$$

- Write $a_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{q_{i,j}}$ and $\det A = \frac{p}{q}$. Then $\det A \leq \Pi_{i,j}(p_{i,j} + 1)$ and $q \leq \Pi_{i,j} q_{i,j}$. We get $\text{size}(q) \leq \text{size}(A)$ and $p \leq q \det A \leq \Pi_{i,j}(p_{i,j} + 1) q_{i,j}$. Thus

$$\text{size}(p) \leq \sum_{i,j} (\text{size}(p_{i,j}) + 1 + \text{size}(q_{i,j})) = \text{size}(A)$$

Exercice 5

Démontrer que le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon Ax = b\}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, est intégral pour tout $b \in \mathbb{Z}^3$.

Indication : La matrice A est-elle TUM ? Trouver un point admissible de P.

Solution

Considérer la sous-matrice définie par les deux premières lignes et les première et dernière colonnes. Son déterminant est 2, donc A n'est pas TUM. Le polyèdre est pourtant intégral, car $\begin{pmatrix} b_3 \\ b_1 - b_2 - 2b_3 \\ b_2 + b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$ est l'unique point admissible.