Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 9 21 avril 2011

Exercice 1

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ un polyèdre. Démontrer que les affirmations suivantes sont équivalentes pour x^* admissible :

i) x^* est un sommet de P.

ii) Il existe un ensemble $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ tel que $|B| = n$, A_B est inversible et $A_B x^* = b_B$.

iii) Pour tout $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \neq x^* \neq x_2$, on a $x^* \notin \operatorname{conv}\{x_1, x_2\}$.

Solution

(ii)⇒(i) : Soit $c \in \operatorname{cone}(A_B)$ une combinaison conique strictement positive des lignes de A_B. Observer que x^* est le sommet du toit B par rapport à c. Comme démontré dans l'exercice 2 de la série 4, le sommet x^* du toit B est l'unique solution optimale du PL $\max\{c^T x \ : \ A_B x \leq b_B\}$. Comme $x^* \in P$, on sait que x^* est l'unique solution optimale du PL $\beta := \max\{c^T x \ : \ Ax \leq b\}$. Donc $c^T x \leq \beta$ pour tout $x \in P$ et $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T x = \beta\} \cap P = x^*$. Alors x^* est un sommet de P.
(i)⇒(iii) : Soit $H := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ c^T x = \beta\}$ l'hyperplan définissant le sommet x^*, c'est-à-dire $H \cap P = \{x^*\}$, et $c^T x \leq \beta$ pour tout $x \in P$. Supposons qu'il existe $x_1, x_2 \in P$, $x_1 \neq x^* \neq x_2$ tel que $x^* = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ pour tous $\lambda \in (0, 1)$. On a

$$\beta = c^T x^* = \lambda \underbrace{(c^T x_1)}_{<\beta,\text{ comme } x_1 \notin H} + (1 - \lambda) \cdot \underbrace{(c^T x_2)}_{<\beta,\text{ comme } x_2 \notin H} < \beta,$$

une contradiction.
(iii)⇒(ii) : Soient $A_=$ et $b_=$ les lignes du système $Ax \leq b$ satisfaites par x^* avec égalité, c-à-d $A_= x^* = b_=$. On veut que $A_=$ soit de plein rang-colonne, c'est-à-dire que l'ensemble $S := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A_= x = b_=\}$ n'admette l'unique solution x^*.
Supposons maintenant que cela n'est pas le cas. Alors S contient une droite $L = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = x^* + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$ pour un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$. Comme $a_i x^* < b_i$ pour toutes les lignes de $A \backslash A_=$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_1 := x^* + \varepsilon v \in P$ et $x_2 := x^* - \varepsilon v \in P$. Nous observons que $x^* \in \mathit{conv}\{x_1, x_2\}$, une contradiction.
Donc $A_=$ est de plein rang-colonne et on a démontré (ii).

Exercice 2

Démontrer les affirmations suivantes :

(i) Soit $\max\{c^T x\colon Ax \leq b\}$ un programme linéaire (admissible et borné) avec un toit optimal B. Le sommet x_B du toit est aussi un sommet du polyèdre $P = \{x\colon Ax \leq b\}$.

(ii) Pour chaque sommet du polyèdre $P = \{x\colon Ax \leq b\}$, il existe un programme linéaire admissible et borné tel que ce sommet est le sommet d'un toit optimal.

Solution

(i) Voir l'exercice 1, étape (ii) $\Rightarrow$ (i)

(ii) Soient x^* le sommet considéré et B l'ensemble des lignes de A tel que A_B est inversible et $A_B x^* = b_B$. Considérons une combinaison conique c des lignes de A_B avec des facteurs strictement positifs. En utilisant l'exercice 2 de la série 4, on obtient que B contient un toit optimal et son sommet x^* est une solution optimale du PL $\max\{c^T x\colon Ax \leq b\}$.

Exercice 3

(i) Démontrer : Un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ avec des sommets est intégral si et seulement si chaque sommet est intégral.

(ii) Considérer le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \leq 4,\ x \geq 0\}$. Montrer que ce polyèdre est intégral.

Solution

(i) Si P est intégral, chaque sommet est intégral par définition.

Supposons maintenant que $P = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ Ax \leq b\}$ est un polyèdre avec des sommets tel que chaque sommet est intégral. Nous démontrons que chaque face de P contient un sommet. Soit x^* un sommet de P.

Considérer une face F définie par l'hyperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ c^T x = \beta\}$, c-à-d $H \cap P = F$ et $c^T x \leq \beta$ pout tout $x \in P$. Par construction, l'ensemble des solutions optimales du PL

$$\max\{c^T x \ :\ Ax \leq b\} \tag{1}$$

est exactement F.

Comme x^* est un sommet de P, on obtient de l'exercice 1 que A est de plein rang-colonne. Alors on applique l'algorithme du simplexe pour résoudre (1). L'algorithme du simplexe trouve une solution optimale y qui est le sommet d'un toit. En utilisant l'exercice 1, on trouve que y est un sommet de P et donc intégral. Comme y est optimal, on a $y \in F$ par construction. Alors la face F contient un point intégral.

(ii) On réécrit P comme suit :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ Ax \leq b\}, \tag{2}$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $b = (4,\ 0,\ 0,\ 0)^T$. A est clairement de plein rang-colonne et donc P a un sommet. En utilisant (i), il est suffisant de montrer que chaque sommet est intégral. On sait de l'exercice 1 que les sommets de P sont les uniques solutions de $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ sous-systèmes obtenus de (2) en choisissant 3 lignes parmi 4 :

L'unique solution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est $x = (0, 0, 1)^T$. L'unique solution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est $x = (0, 2, 0)^T$. L'unique solution du système

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est $x = (4, 0, 0)^T$. L'unique solution du système

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

est $x = (0, 0, 0)^T$. Donc P est intégral.

Exercice 4

Considérer le graphe complet G_n avec $n = 3$ sommets, c'est-à-dire $G = (\{1, 2, 3\}, \binom{3}{2})$ et le programme linéaire en nombres entiers de la couverture par sommets. Le polyèdre de sa relaxation linéaire est-il intégral ?

Solution

Le PLNE de la couverture par sommets pour G_3 est :

$$\begin{array}{rcl} \min & w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 & \\ & x_1 + x_2 & \geq 1 \\ & x_1 + x_3 & \geq 1 \\ & x_2 + x_3 & \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0 & \end{array}$$

Soit $w_1 = w_2 = w_3 = 1$. Nous observons que au moins deux sommets sont nécessaires dans une couverture par sommets, c'est-à-dire que la valeur optimale du PLNE est 2. Par contre, le vecteur $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ est une solution admissible de sa relaxation linéaire avec une valeur de l'objectif $\frac{3}{2} < 2$.
Supposons que le polyèdre de la relaxation linéaire est intégral. Comme vu en cours, l'algorithme du simplexe va donc calculer une solution optimale en nombres entiers. Sa valeur est au moins 2 alors que la valeur optimale d'une solution rationnelle est $\frac{3}{2}$ au plus, une contradiction.

Exercice 5

Il s'agit de démontrer l'indication de l'exercice 3 de la série 8 :
Une matrice telle que chaque colonne contient une composante 1 et une composante -1 au plus et que les autres sont nulles, est totalement unimodulaire. En particulier, la matrice d'incidence d'un graphe orienté est TUM.

Indication : Rappeler la preuve pour la matrice d'incidence d'un graphe (non-orienté et) biparti.

Solution

Soit A une sous-matrice carrée de taille $n \times n$ de la matrice considérée. Nous démontrons que $det(A) \in \{-1, 0, 1\}$ par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial. Soit donc $n > 1$. On distingue trois cas :
- Il existe une colonne nulle. Alors le déterminant de A est zéro.
- Il existe une colonne avec un seul 1 ou -1. En développant par rapport à cet élément, on a réduit de 1 la taille de la matrice courante et seulement le signe du déterminant peut changer si on considère la matrice réduite.
- Chaque colonne contient exactement une composante 1 et une composante -1. Donc la somme sur les lignes de la matrice est nulle. Alors le déterminant est 0.

Exercice 6

(i) Donner un tableau des valeurs de la fonction pour $\log n, \sqrt{n}, n, n \log n, n^2, n^3, 2^n$ et $n = 1, 10, 100, 10^3, 10^6$.

(ii) Les affirmations suivantes sont-elles correctes ? Répondre Oui ou Non dans chaque cas.
$n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$ $\quad n + \log n \in \mathcal{O}(n)$ $\quad \log\log n \in \Theta(n)$ $\quad n^{100} \in \mathcal{O}(1.001^n)$
$n^3 \in \Theta(n^2)$ $\quad n \log n \in \mathcal{O}(n)$ $\quad 100n^2 + 1000n \in \Omega(n^2)$

(iii) Trier la liste suivante de sorte que $f_i \in \mathcal{O}(f_j)$ pour $i \leq j$ dans la liste obtenue :

$$n^2 + 10\sqrt{n}, 200\log n, n^n, \exp^n, n^2 + n^3, 2^n\sqrt{n}, 2 + n, \sqrt{n}, 10^{80}, n^2\sqrt{n}, \sqrt[4]{7n}$$

Solution

On suppose sans perte de généralité que log est de base 10.

(i)

	$\log n$	$\sqrt{n}$	n	$n\log n$	n^2	n^3	2^n
1	0	1	1	0	1	1	2
10	1	$\sqrt{10}$	10	20	100	1000	1024
100	2	10	100	200	10^4	10^6	10^{30}
10^3	3	$10\sqrt{10}$	10^3	$3 \cdot 10^3$	10^6	10^9	10^{301}
10^6	6	10^3	10^6	$6 \cdot 10^6$	10^{12}	10^{18}	10^{301030}

(ii)

- $n^2 \in \mathcal{O}(n^3)$
  Oui, car $n^2 \leq n^3$ pour $n \geq 1$.
- $n + \log n \in \mathcal{O}(n)$
  Oui, car $n + \log n \leq 2 \cdot n$ pour $n \geq 0$.
- $\log\log n \in \Theta(n)$
  Non, car il n'existe pas de $N \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq c \cdot \log\log n$ pour $n \geq N$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log\log n} = \infty$).
- $n^{100} \in \mathcal{O}(1.001^n)$
  Oui, car $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{100}}{1.001^n} = 0$ (Règle de l'Hôpital !). C'est-à-dire qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $n^{100} \leq 1.001^n$ pour $n \geq N$ par la définition de la limite (On a choisi $c = 1$).
- $n^3 \in \Theta(n^2)$
  Non, car $n^3 \notin \mathcal{O}(n^2)$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2} = \infty$).
- $n \log n \in \mathcal{O}(n)$
  Non, car $\lim_{n\to\infty} \frac{n\log n}{n} = \infty$
- $100n^2 + 1000n \in \Omega(n^2)$
  Oui, car $n^2 \leq 100n^2 + 1000n$ pour $n \geq 0$. Observer que $100n^2 + 1000^n \leq 2000 \cdot n^2$ pour $n \geq 1$, c-à-d $100n^2 + 1000n \in \Theta(n^2)$

(iii)

$$10^{80}, 200\log n, \sqrt[4]{7n}, \sqrt{n}, 2 + n, n^2 + 10\sqrt{n}, n^2 + n^3, n^2\sqrt{n}, \exp^n, 2^n\sqrt{n}, n^n$$