Optimisation Discrète

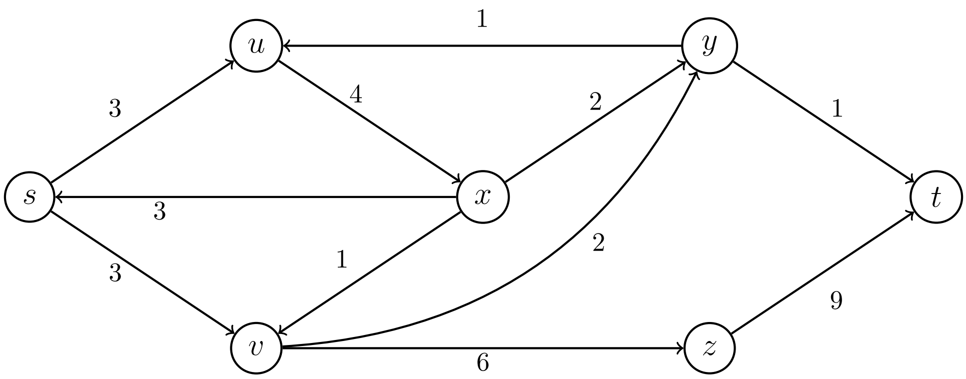
Semestre de printemps 2013

Série 9 2 mai 2013

Remarque générale :
Si vous voulez obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites aux exercices notés, au plus tard le **lundi 13 mai**, avant 12h dans la boîte au bureau MA B1 533.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Considérer le réseau suivant :



Appliquer l'algorithme de Edmonds-Karp (considérer le chemin d'augmentation le plus court) pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin améliorant choisi.
Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Solution

Voir ce site : `http://en.wikipedia.org/wiki/Edmonds-Karp_algorithm`

Exercice 2 $(*)$

Soit (D, u, s, t) un réseau (c-à-d un graphe orienté simple $D = (V, A)$ avec des capacités $u : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et deux sommets $s, t \in V$). En plus, soit $\delta^{out}(U)$ et $\delta^{out}(W)$ deux coupes de capacité minimale de s-t. Démontrer que $\delta^{out}(U \cup W)$ et $\delta^{out}(U \cap W)$ sont également des coupes de capacité minimale de s-t.

Solution

On obtient par distinction des cas :

$$u(\delta^{out}(U)) + u(\delta^{out}(W)) \geq u(\delta^{out}(U \cup W)) + u(\delta^{out}(U \cap W))$$

On montre que chaque arc considéré à droite est considéré à gauche aussi. Ceci est suffisant car les capacités sont non-négatives.

(i) $(i,j) \in \delta^{out}\Big((U \cup W) \setminus (U \cap W)\Big)$: Dans ce cas, on a soit $i \in U$ soit $i \in W$. De toute façon, on considère sa capacité une fois à droite et une fois à gauche.

(ii) $(i,j) \in \delta^{out}(U \cap W)$ avec $j \notin U \cup W$: Un tel arc est considéré dans chacun des 4 ensembles, alors deux fois à droite et deux fois à gauche.

(iii) $(i,j) \in \delta^{out}(U \cap W)$ avec $j \in U \cup W$: Dans ce cas, on a soit $j \in U$ soit $j \in W$. De toute façon, on considère sa capacité une fois à droite et une fois à gauche.

Observer que les arcs (i,j) ou (j,i) avec $i \in U \setminus W$ et $j \in W \setminus U$ sont considérés à gauche de l'inégalité, mais jamais à droite.
Si alors $\delta^{out}(U)$ et $\delta^{out}(W)$ sont deux coupes de capacité minimale de s-t, $\delta^{out}(U \cup W)$ et $\delta^{out}(U \cap W)$ doivent également être des coupes de capacité minimale de s-t. Sinon, une des deux aurait une capacité strictement inférieure à l'autre ce qui est impossible par l'optimalité de respectivement $\delta^{out}(U)$ et $\delta^{out}(W)$.

Remarque : On a démontré que la fonction de capacité d'une coupe de s-t est sous-modulaire : Soient S un ensemble et g une fonction qui à tout sous-ensemble X de S associe un réel $g(X)$, on dit que g est sous-modulaire si l'inégalité suivante est vérifiée pour tout sous-ensemble X et Y de S

$$g(X) + g(Y) \geq g(X \cup Y) + g(X \cap Y).$$

Le résultat crucial est que l'on peut minimiser chaque fonction sous-modulaire en temps polynômial.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de prouver, à l'aide de dualité, le théorème flot-max/coupe-min : Pour un réseau (D,u,s,t), la valeur maximale du flot de s à t est égale à la capacité minimale d'une coupe de s-t.
Soit (D,u,s,t) un réseau. Ajouter un arc artificiel (t,s) avec une capacité très grande $u(t,s) = \sum_{a \in A} u(a)$ et obtenir l'ensemble $A' = A \cup \{(t,s)\}$.
Considérer le PL suivant :

$$\begin{aligned}
\max \quad & f_{t,s} \\
\sum_{(i,j) \in A'} f_{i,j} = \sum_{(k,i) \in A'} f_{k,i} & \qquad \forall i \in V \\
0 \leq f_{i,j} \leq u(i,j) & \qquad \forall (i,j) \in A'
\end{aligned}$$

(i) Trouver le PL dual de ce programme linéaire.

(ii) Démontrer que pour chaque coupe de s-t $\delta^{out}(U)$, il existe une solution admissible du PL dual avec une valeur d'objectif $u(\delta^{out}(U))$.

(iii) Prouver que le PL dual est intégrale, c-à-d tous ses sommets ont des composantes entières.
Indication : Utiliser le fait qu'une matrice TUM (c-à-d totalement unimodulaire) augmentée par une (sous-matrice d'une) matrice d'identité est toujours TUM.

(iv) Démontrer que chaque solution intégrale et optimale du PL dual permet de trouver une coupe de s-t avec capacité égale à la valeur d'objectif. Conclure que la valeur maximale du flot de s à t est égale à la capacité minimale d'une coupe de s-t.

Solution
Observer que l'on a ajouté l'arc artificiel de t à s pour obtenir la conservation du flot pour tous les sommets et pour simplifier la fonction d'objectif. La valeur optimale du PL correspond évidemment à la valeur d'un flot maximum dans le réseau (D, u, s, t).

(i) On trouve le LP dual suivant :

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in A'} y_{i,j} u(i,j) & \\
& z_i - z_j + y_{i,j} \geq 0 & \forall (i,j) \in A \\
& z_t - z_s + y_{t,s} \geq 1 & \\
& y_{i,j} \geq 0 & \forall (i,j) \in A'
\end{aligned}$$

(ii) On pose $z_i = 0$ pour chaque $i \in U$ et $z_i = 1$ sinon (alors si $i \notin U$) et $y_{i,j} = 1$ si $(i,j) \in \delta^{out}(U)$, $y_{i,j} = 0$ sinon. Cette solution est admissible car $z_i - z_j < 0$ si et seulement si $(i,j) \in \delta^{out}(U)$. Sa valeur d'objectif est clairement $u(\delta^{out}(U))$.

(iii) Observer que la matrice qui définit le PL dual est la matrice d'incidence arc-sommet d'un graphe orienté (donc TUM, vu en cours) augmentée par une matrice identité $|A'| \times |A'|$ à droite. Avec la remarque, on peut conclure que la matrice résultante est toujours TUM. Similairement, on peut augmenter la matrice par une (sous-matrice d'une) matrice identité en dessous pour les conditions de non-négativité. Le vecteur du côté droit du PL dual est intégral et alors tous les sommets sont intégrals par un théorème du cours.

(iv) Soit (y^*, z^*) une solution optimale du PL dual. Noter que $(y^*, z^* + C)$ est aussi une solution optimale pour chaque $C \in \mathbb{R}$. On peut supposer alors que $z_s^* = 0$ sans perte de généralité. Par la partie (iii), on peut supposer en plus que z^* et y^* sont des vecteurs intégrals.
L'idée est de construire une coupe de s-t dont la capacité est égale la valeur d'objectif d'une solution optimale du PL primal, c-à-d un flot maximum. On pose $U := \{i \in V : z_i^* = 0\}$. Clairement, $s \in U$. En plus, on a $y_{t,s}^* = 0$ car la capacité de l'arc (t,s) est trop grande. Alors $z_t^* + z_s^* + y_{t,s}^* = z_t^* \geq 1$

et ainsi $t \notin U$. Soit f^* une solution optimale du PL primal. Les conditions du relâchement complémentaire forcent que

$$(u(i,j) - f^*_{i,j})y_{i,j} = 0$$

pour tout $(i,j) \in A'$ et

$$f^*_{i,j}(z_i - z_j + y_{i,j}) = 0$$

pour tout $(i,j) \in A$ (non A'). Pour tout $(i,j) \in \delta^{out}(U)$, $z_i - z_j + y_{i,j} \geq 0$ implique $y_{i,j} > 0$ et alors $f^*(i,j) = u(i,j)$. Par contre, on a pour tout $(i,j) \in \delta^{in}(U)$ différent de (t,s) que $f^*(i,j) = 0$ car $z_i - z_j + y_{i,j} \geq z_i - z_j > 0$. On obtient pour la capacité de cette coupe :

$$\begin{aligned}
u(\delta^{out}(U)) &= \sum_{(i,j)\in\delta^{out}(U)} u(i,j) \\
&= \sum_{(i,j)\in\delta^{out}(U)} f^*_{i,j} \\
&= f^*_{t,s} + \sum_{(i,j)\in\delta^{out}(U)} f^*_{i,j} - \sum_{(i,j)\in\delta^{in}(U)} f^*_{i,j} \\
&= f^*_{t,s} + \sum_{i\in U} \sum_{(i,j)\in\delta^{out}(i)} f_{i,j} - \sum_{(k,i)\in A'} f^*_{k,i} \\
&= f^*_{t,s}
\end{aligned}$$

La deuxième et la troisième equation sont impliquées par le relâchement complémentaire. Pour la quatrième equation, noter que chaque (i,j) avec $i,j \in U$ fait partie de $\delta^{out}(i)$ et de $\delta^{in}(j)$ et il est donc amorti. La dernière equation est une simple conséquence du fait que f^* est admissible.
On a alors trouvé une coupe de s-t avec une capacité égale à la valeur optimale d'un flot dans le réseau.

Remarque : Avec une argumentation similaire, on peut aussi montrer qu'il existe toujours un flot intégral si les capacités u sont également des entiers.

Exercice 4

Donner une manière de trouver un couplage de cardinalité maximale dans un graphe biparti qui s'exécute en temps $\mathcal{O}(nm)$ en utilisant des flots.

Solution

Soit $G = (V,E)$ un graphe biparti avec $n = |V|$ et $m = |E|$. On peut supposer que $n \in \mathcal{O}(m)$. Soit A et B une partition des sommets de G en deux stables. Orienter toutes les arêtes vers l'ensemble B.
On ajoute des sommets artificiels s et t et des arcs (s,v) pour tout $v \in A$ et (v,t) pour tout $v \in B$. On choisit une capacité de 1 pour chaque arc. Soit D le graphe obtenu avec $n' = |A| + |B| + 2$ sommets et $m' = |A| + |B| + |E|$ arcs, où E est l'ensemble d'arêtes du graphe biparti.
Observer que tout couplage de cardinalité k dans G induit un flot de s à t dans D avec une valeur k et vice versa.

Comme la valeur du flot maximal est bornée par n (et que les capacités sont entières), il y a n itérations améliorantes au plus. Comme vu en cours, chaque recherche d'un chemin améliorant peut être implémentée en temps $\mathcal{O}(m)$. Alors l'algorithme du flot maximal s'exécute en temps $\mathcal{O}(n'm') = \mathcal{O}(nm)$.