Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 8 **14 avril 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1 (Δ)

Soit $M \in \{-1, 0, 1\}^{n \times m}$ totalement unimodulaire (TUM). Démontrer que les matrices suivantes sont aussi TUM.

(i) M^T

(ii) $(M \quad I_n)$

(iii) $(M \quad -M)$

(iv) $M \cdot (I_n - 2e_j e_j^T)$ pour un $j \in \{1, \ldots, n\}$,

où I_n est la matrice identité de taille $n \times n$ et e_j est le $j^{\text{ième}}$ vecteur unitaire.

Solution

(i) Soit A une sous-matrice carrée de M^T. Alors
$$\det(A) = \det(A^T) \in \{-1, 0, 1\}$$
comme A^T est une sous-matrice carrée de M et M est TUM.

(ii) Soit A une sous-matrice carrée de $(M \quad I_n)$. Soient $a_1, \ldots, a_k$ les colonnes de A qui proviennent de I_n. Donc il existe une entrée 1 au plus dans chaque de ces colonnes, les autres sont nulles. En développant par rapport à ces colonnes on trouve $|\det(A)| = |\det(A')|$ pour une sous-matrice carrée A' de M. Puisque M est TUM, on obtient $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$.

(iii) Soit A une sous-matrice carrée de $(M \quad -M)$. Soient $a_1, \ldots, a_k$ les colonnes de A qui descendent de $-M$. Soit A' la matrice obtenue de A en multipliant $a_1, \ldots, a_k$ avec -1. Alors, on sait de l'Algèbre linéaire que
$$|\det(A)| = |\det(A')|.$$
On distingue deux cas.

Cas 1 : A' est (modulo permutation des colonnes) une sous-matrice carrée de M. Comme M est TUM, on obtient $\det(A') \in \{-1, 0, 1\}$.

Cas 2 : A' a au moins deux colonnes identiques. Donc $\det(A') = 0$.

Dans les deux cas, on a $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$.

(iv) Observons que $M \cdot (I_n - 2e_j e_j^T)$ est obtenue à partir de M en multipliant une colonne par -1. Alors, $M \cdot (I_n - 2e_j e_j^T)$ est (modulo permutation des colonnes) une sous-matrice de $(M \quad -M)$. Comme $(M \quad -M)$ est TUM, $M \cdot (I_n - 2e_j e_j^T)$ l'est également.

Exercice 2

Lesquelles de ces matrices sont TUM ? Justifier votre réponse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution

La première matrice n'est pas TUM, car son déterminant est 2.
La deuxième est TUM, car c'est une matrice d'intervalle (en lignes). Voir aussi l'exercice 3.

Exercice 3 $(*)$

Une matrice d'intervalle est une matrice avec des composantes 0 ou 1 telle que les composantes qui valent 1 sont consécutives **en lignes** (voir la deuxième matrice de l'exercice 2 pour un exemple). Donner une preuve que toutes les matrices d'intervalle sont TUM.

Indications :
- Utiliser l'exercice 1.
- Certaines opérations élémentaires préservent la propriété d'être **unimodulaire** : échanger des lignes, ajouter une ligne à une autre, soustraire une ligne d'une autre
- Une matrice telle que chaque colonne contient une composante 1 et une composante -1 au plus et les autres sont nulles, est totalement unimodulaire (la matrice d'incidence d'un graphe orienté, à voir plus tard dans le cours).

Solution

Soit M une matrice d'intervalle en lignes. Considérer une sous-matrice carrée A de M (les sous-matrices non-carrées sont de déterminant 0). Comme M est une matrice d'intervalle en lignes, A l'est aussi (supposer le contraire et trouver une contradiction avec la propriété de M). Il s'agit maintenant de montrer que le déterminant de A est $-1, 0$ ou 1, c'est-à-dire que A est unimodulaire. Considérer la tranposée A^T de A (le déterminant est le même). Comme démontré en Algèbre linéaire, les opérations élémentaires données dans la deuxième indication préservent la propriété d'être unimodulaire. On va soustraire la $i^{\text{ème}}$ ligne de la

$(i+1)^{\text{ème}}$ ligne pour $i = 1, \ldots, n-1$ si A^T est de taille $n \times n$. Comme A^T est une matrice d'intervalle en colonnes, on obtient une matrice B dont chaque colonne contient une composante 1 et une composante -1 au plus et les autres sont nulles. Comme B est TUM (voir l'exercice 5 de la série 9), B est unimodulaire et donc A^T et A aussi.

Exercice 4

Une famille de sous-ensembles $\mathcal{F}$ d'un ensemble de référence fini E est *laminaire*, si pour tous les $C, D \in \mathcal{F}$, on trouve une de ces possibilités :

$$(i)\ C \cap D = \emptyset, \quad (ii)\ C \subseteq D, \quad (iii)\ D \subseteq C.$$

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles laminaires du même ensemble de référence E. Nous considérons leur union $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
On définit la matrice d'adjacence A de $|\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2| \times |E|$ par :
Pour $F \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ et $e \in E$, on a $A_{F,e} = 1$, si $e \in F$ et $A_{F,e} = 0$ sinon.

Montrer que A est totalement unimodulaire.

Solution

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles linéaires du même ensemble de référence E, et A la matrice d'adjacence correspondante. Observer que *chaque* sous-matrice carrée de A est aussi une matrice d'adjacence de deux familles laminaires :
Éliminer une ligne de A correspond à éliminer un ensemble des deux familles laminaires. Éliminer une colonne de A correspond à éliminer un élément de l'ensemble de référence de tous les ensembles dans les deux familles laminaires. Les deux opérations préservent la structure de familles linéaires.
Donc, il est suffisant de démontrer l'affirmation suivante : Chaque matrice carrée A qui est une matrice d'adjacence de deux familles laminaires a un déterminant ± 1 ou 0.
On transforme A avec des opérations élémentaires sur les colonnes comme suit :
Soit $e \in E$ un élément de l'ensemble de référence qui est au moins dans deux ensembles de $\mathcal{F}_1$. Soient $S_1, \ldots, S_k$ les ensembles de $\mathcal{F}_1$ avec $e \in S_i$. En utilisant les propriétés des familles laminaires, on sait qu'il existe un $l \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $S_l \subseteq S_i$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. Redéfinir $S_i := S_i \backslash S_l$ pour tout $i \neq l$. Noter que $\mathcal{F}_1$ est encore une famille laminaire après cette modification. De plus, l'opération qui élimine l'ensemble S_l correspond à soustraire la ligne S_l des autres lignes S_i dans la matrice A.
On applique alors cette transformation à $\mathcal{F}_i$ jusqu'à ce que chaque $e \in E$ appartienne à un ensemble de $\mathcal{F}_i$ au plus pour $i = 1, 2$. En appliquant les opérations élémentaires correspondantes sur les lignes de A on obtient une matrice A' avec $\det(A) = \det(A')$. A' a la propriété qu'il existe deux sous-ensemble disjoints des lignes, celles correspondant à $\mathcal{F}_1$ et celles correspondant à $\mathcal{F}_2$, tels que chaque colonne de A' contient une entrée 1 au plus dans les lignes de $\mathcal{F}_1$ et une entrée 1 au plus dans les lignes de $\mathcal{F}_2$. Toutes les autres entrées valent 0.
Soit A'' la sous-matrice de A' qui ne consiste qu'en les colonnes avec deux entrées 1. Noter que A'' est la matrice d'incidence d'un graphe (non-orienté et) biparti.

Donc A'' est TUM comme vu en cours. Avec l'exercice $1(ii)$, on obtient que A' est TUM, alors $\det(A) \in \{-1, 0, 1\}$.