Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Semestre de printemps 2013

Série 8 **18 avril 2013**

Remarque générale :
Si vous voulez obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites aux exercices notés, au plus tard le **lundi 29 avril**, avant 12h dans la boîte au bureau MA B1 533.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1
Trouver la forme duale des programmes linéaires suivants :

(i)

$$\begin{array}{rrcl} \max & 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 & & \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 - x_3 & \geq & -15 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrcr} \min & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 & & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \leq & 3 \\ & x_2 + 3x_3 + 4x_4 & \geq & -5 \\ & 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 & = & 2 \\ & x_1 \geq 0 & & \\ & x_4 \leq 0 & & \end{array}$$

Solution

(i)

$$\begin{array}{rrrrcr} \min & 4y_1 & 8y_2 & -15y_3 & & \\ & y_1 & +y_2 & +y_3 & \geq & 2 \\ & 3y_1 & +y_2 & & \geq & 3 \\ & 2y_1 & & -y_3 & = & -7 \\ & & y_2 & & \geq & 0 \\ & & & y_3 & \leq & 0 \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rrcr}
\max & 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 & & \\
 & 2y_1 + 2y_3 & \leq & 3 \\
 & -2y_1 + y_2 - 3y_3 & = & 2 \\
 & 3y_1 + 3y_2 - 7y_3 & = & -3 \\
 & y_2 + y_2 - y_3 & \geq & 1 \\
 & y_1 \leq 0 & & \\
 & y_2 \geq 0 & &
\end{array}$$

Exercice 2
Étant donné le programme linéaire :

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{sous contraintes} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& 3x_1 + 4x_2 \leq 22 \\
& x_1 + 5x_2 \leq 23
\end{aligned}$$

Démontrer que $(4/3, 10/3)$ est une solution optimale en utilisant le relâchement complémentaire.

Solution
Le PL sous forme duale est le suivant :

$$\begin{aligned}
\min \quad & 6y_1 + 8y_2 + 22y_3 + 23y_4 \\
\text{sous contraintes} \quad & 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 1 \\
& y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 5y_4 = 1 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0
\end{aligned}$$

On constate que la solution $(4/3, 10/3)$ satisfait les deux premières contraintes du PL sous forme primale avec égalité, alors que les deux dernières contraintes sont satisfaites strictement avec inégalité. En appliquant la première partie de l'exercice, on obtient que *si* x est optimale, alors *toute* solution optimale y du PL sous forme duale satisfait $y_3 = y_4 = 0$.
Alors les deux inégalités du PL sous forme duale peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 &= 1 \\
y_1 + 2y_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Le système est de plein rang, donc il existe une solution unique : $y_1 = y_2 = \frac{1}{3} \geq 0$. Alors $y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est admissible. La première partie nous donne que x et y sont des solutions optimales.
On peut le vérifier en calculant leurs valeurs de l'objectif : $6y_1+8y_2+22y_3+23y_4 = \frac{14}{3} = x_1 + x_2$. La dualité faible nous certifie l'optimalité.

Exercice 3 $(*)$
Considérer deux polyèdres $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ et $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Dx \leq d\}$ qui

sont non-vides. Nous nous intéressons à trouver si les deux polyèdres ont un point en commun.

(a) Inventer un programme linéaire tel que : Si $P \cap Q$ est non-vide, on donne un point dans $P \cap Q$ (alors le PL à trouver est admissible) ; si $P \cap Q$ est vide, ce PL doit être inadmissible.

(b) Supposons que $P \cap Q$ est vide. Utiliser le dual du PL trouvé en partie (a) pour montrer qu'il existe un vecteur c tel que $c^T x < c^T y$ pour tout $x \in P$ et $y \in Q$.

Solution

(a) Le programme linéaire est simplement

$$\max\{0^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, x \in P \cap Q\} = \max\{0 \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b, Dx \leq d\}$$

(b) Le dual du PL de la partie (a) est

$$\begin{aligned} \min \quad & y_1^T b + y_2^T d \\ y_1^T A + y_2^T D &= 0 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Comme le PL primal est inadmissible ($P \cap Q$ est vide), le PL dual est soit non-borné soit inadmissible aussi. Or, $y_1 = 0, y_2 = 0$ est une solution admissible pour le PL dual. Alors le PL dual est non-borné. Ce fait implique qu'il existe une solution duale (y_1, y_2) tel que $y_1^T b + y_2^T d < 0$. En posant $c^T = y_1^T A$, on obtient pour tout $x \in P$ $y_1^T Ax \leq y_1^T b$ car $Ax \leq b$ et $y_1 \geq 0$. On a alors

$$c^T x = y_1^T Ax \leq y_1^T b < -y_2^T d$$

Notons que pour tout $y \in Q$, on a $Dy \leq d$ et alors $y_2^T Dy \leq y_2^T d$, car $y_2 \geq 0$. Alors on trouve

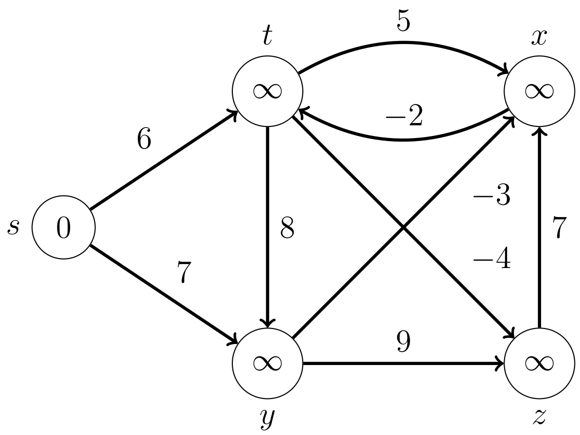
$$-y_2^T d \leq -y_2^T Dy = c^T y$$

parce que (y_1, y_2) est admissible pour le PL dual. On peut conclure

$$c^T x = \leq y_1^T b < -y_2^T d \leq c^T y$$

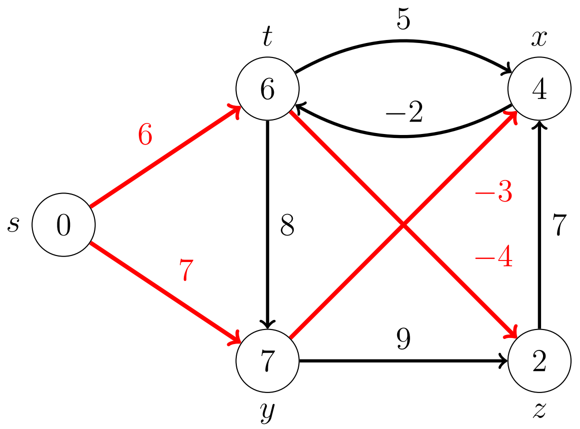
Exercice 4

Considérer le graphe orienté figuré ci-dessous avec des étiquettes de distance. Pour trouver les distances depuis s, exécuter l'algorithme de Bellman-Ford avec la modification vue dans l'exercice 1 de la semaine 6 (c-à-d en repartant les arcs dans deux ensembles A_1 et A_2 pour l'ordre s, z, x, y, t). Dans chaque itération k, indiquer le graphe avec les étiquettes de distance d_k. Pour chaque sommet, marquer l'arc qui atteint le minimum (s'il existe), c-à-d l'arc défini par le prédecesseur.

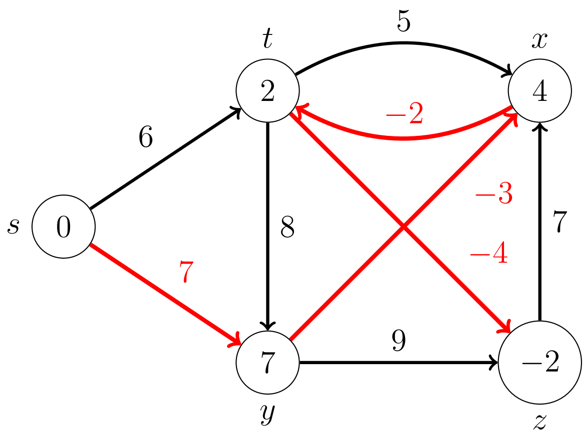


Solution

Après la première itération :



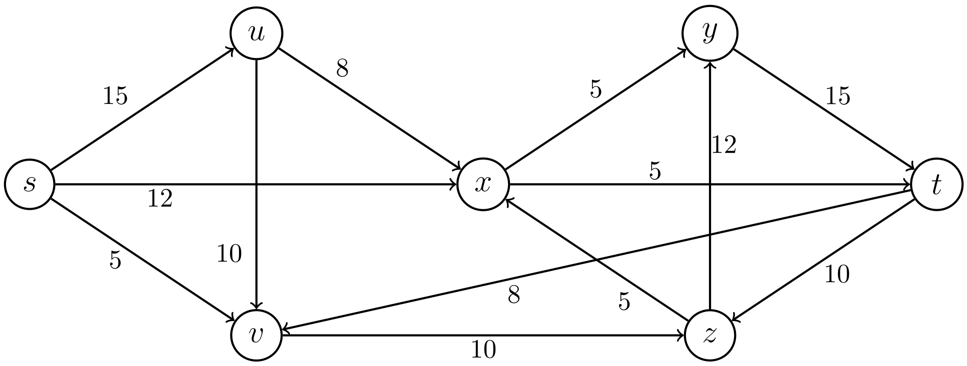
Après l'itération 2 (et 3 aussi) :



Notons que l'algorithme de Bellman-Ford sans cette modification ne se termine qu'après 5 itérations.

Exercice 5

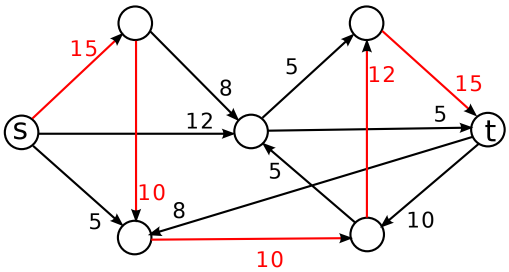
Considérer le réseau suivant :



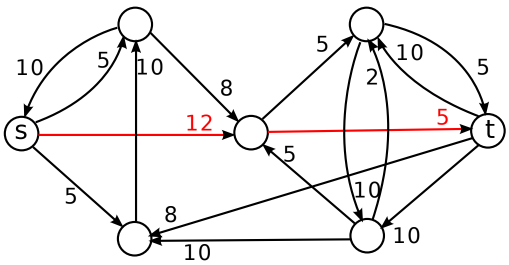
Appliquer l'algorithme de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximal de s à t. À chaque itération, donner le graphe résiduel et marquer le chemin améliorant choisi.
Donner en plus une coupe minimale de s-t dans le réseau.

Solution

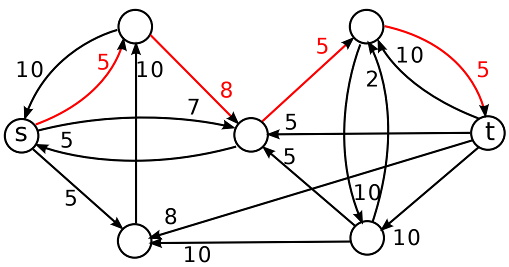
Initialement, le graphe résiduel est égal au réseau original. Le chemin améliorant de s à t que l'on a choisi est marqué en rouge. On augmente le flot de 10 unités :



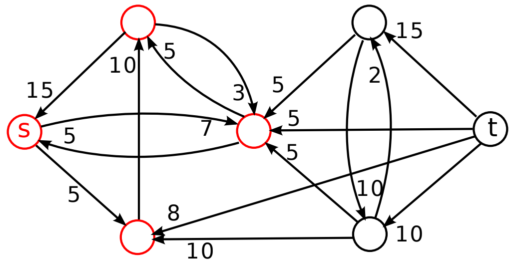
On obtient le graphe résiduel suivant et on choisit le chemin améliorant en rouge. On augmente le flot de 5 unités :



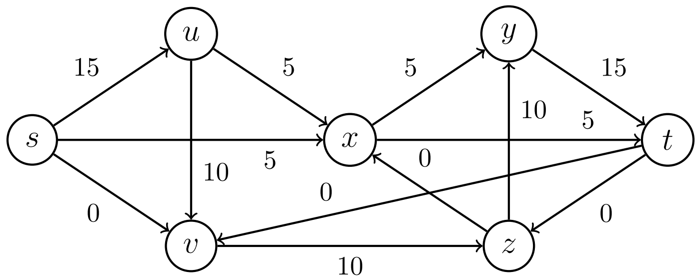
On obtient le graphe résiduel suivant et on choisit le chemin améliorant en rouge. On augmente le flot de 5 unités :



On obtient le graphe résiduel suivant :

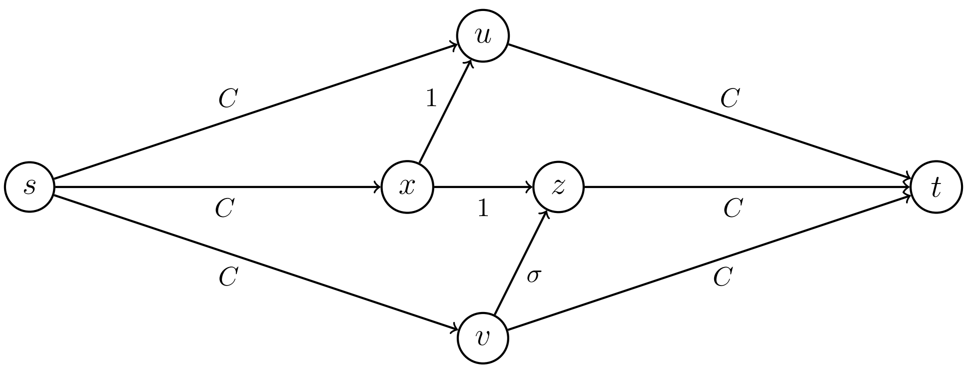


t n'est plus accessible depuis s dans le graphe résiduel. Donc le flot est maximal et sa valeur est 20. L'ensemble $U = \{s, u, v, x\}$ qui définit la coupe minimale de s-t est marquée en rouge. Le flot maximal est indiqué dans le graphe suivant :



Exercice 6

Considérer le réseau suivant, où C est une très grande capacité et $\sigma < 1$ un nombre positif.



Il s'agit de démontrer que l'algorithme de Ford-Fulkerson ne termine pas pour un certain choix de σ.

- Quel est le flot maximal de s à t ? Quelle est sa valeur ?
- Soit $\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$. Trouver une suite des chemins améliorants qui concourt à un flot de valeur 7 au plus.

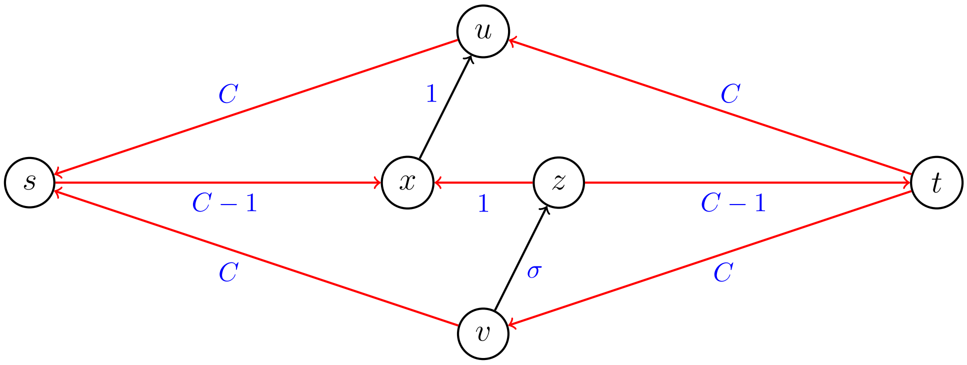
Donner tous les chemins améliorants utilisés et les graphes résiduels correspondants.

Indication : Pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$, essayer de revenir toujours à des capacités sous forme $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ dans le graphe résiduel après quelques itérations améliorantes.

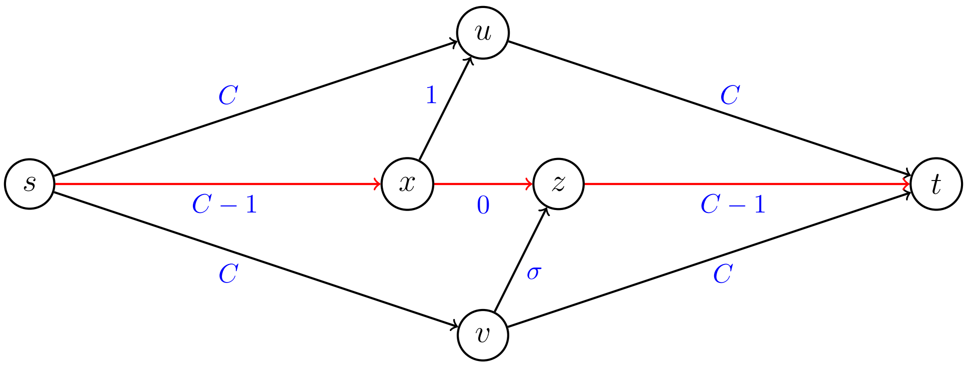
Solution

Observer que $\sigma = \phi - 1$, où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or. Comme $\phi^2 = \phi + 1$, on obtient $\sigma^2 = (1-\phi)^2 = \phi^2 - 2\phi + 1 = 2 - \phi = 1 - \sigma$.

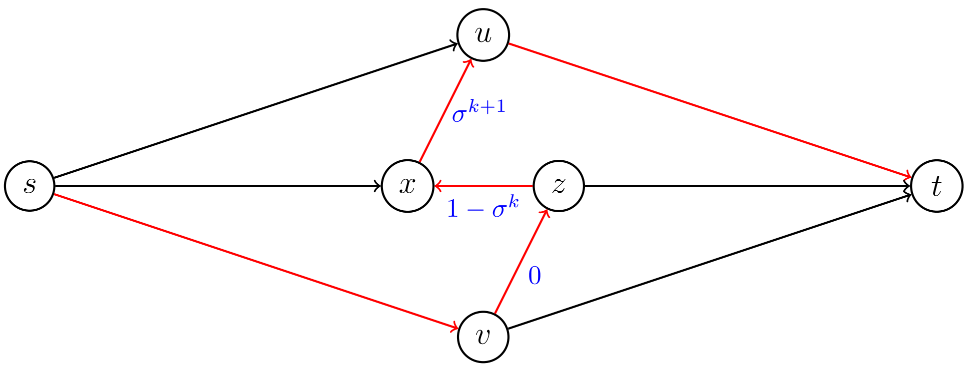
La valeur du flot maximal est $1+2C$. Voici le graphe résiduel après l'augmentation le long des chemins rouges.



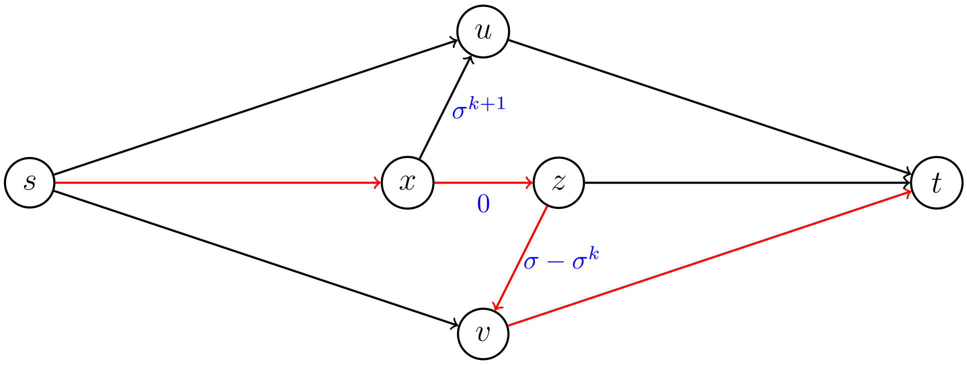
La coupe définie par $\{s, x, u\}$ a une capacité de $1 + 2C$, donc le flot est maximal. Considérons maintenant un choix des chemins améliorants moins avantageux. On commence avec le chemin s-x-z-t et on obtient le graphe résiduel suivant :



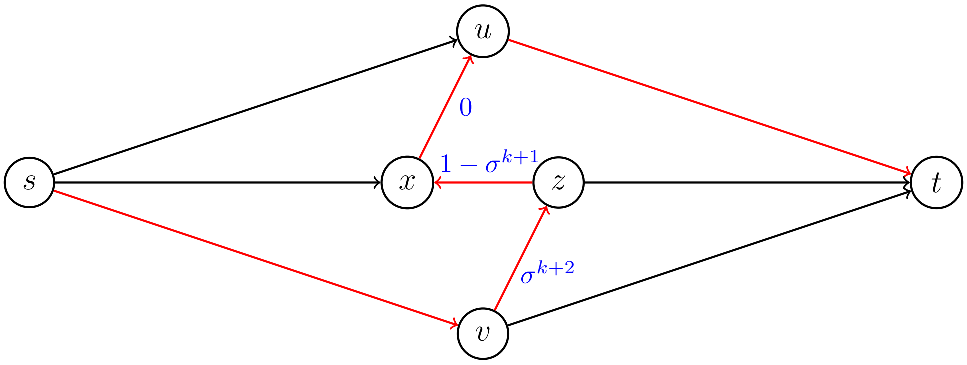
Observer que l'on a des capacités $\sigma^0, 0, \sigma$ pour les arcs $(x, u), (x, z), (v, z)$. Comme indiqué, on va se concentrer sur ces arcs.
Supposons donc que les capacités sont $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ pour un $k \in N$. Nous démontrons maintenant comment on peut obtenir des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$ en utilisant une suite de 4 chemins améliorants.
D'abord, on choisit le chemin améliorant suivant (appelé A) :



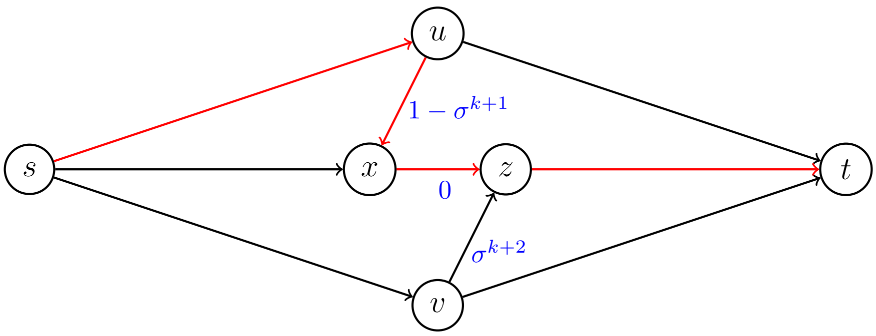
On augmente alors le flot de σ^k et on obtient des capacités $\sigma^{k+1}, \sigma^k, 0$.
Le deuxième chemin B augmente le flot aussi de σ^k et on obtient des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^k$:



On choisit encore le chemin A et on obtient une augmentation de σ^{k+1} et des capacités $0, \sigma^{k+1}, \sigma^{k+2}$:



Finalement, on prend un chemin améliorant P pour obtenir une augmentation de σ^{k+1} et des capacités $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$:



Donc on augmente la valeur du flot de $2\sigma^k + 2\sigma^{k+1}$ en passant de $\sigma^{k-1}, 0, \sigma^k$ à $\sigma^{k+1}, 0, \sigma^{k+2}$. On obtient pour la valeur du flot :

$$value(f) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \leq 1 + 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k = 1 + \frac{2}{1-\sigma} < 7$$

Observer que la limite est donc strictement plus petite que la valeur du flot optimal (si $C \geq 3$). Alors, on a une suite infinie des chemins améliorants et l'algorithme de Ford-Fulkerson ainsi ne termine pas.