Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 7

7 avril 2011

Exercice 1

(i) Considérer le programme linéaire

$$\max\{c^T x \ : \ Ax \le b\}$$

avec $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Sa forme duale est

$$\min\{b^T y \ : \ A^T y = c, \ y \ge 0\}.$$

Soient x et y des solutions admissibles respectivement sous forme primale et duale. Démontrer l'affirmation suivante :

Les vecteurs x et y sont optimaux dans la forme correspondante du PL si et seulement si on a soit $a_i^T x = b_i$ soit $y_i = 0$ pour tous $i = 1, \dots, m$.

Indication : Considérer le produit scalaire $(b - Ax)^T y$ et montrer que l'on trouve 0 si et seulement si x et y sont optimaux. Pourquoi cette affirmation est-elle suffisante ?

(ii) Étant donné le programme linéaire :

$$\begin{array}{rc} \max & x_1 + x_2 \\ \text{sous contraintes} & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & 3x_1 + 4x_2 \le 22 \\ & x_1 + 5x_2 \le 23 \end{array}$$

Démontrer que $(4/3, 10/3)$ est une solution optimale en utilisant la première partie de cet exercice.

Solution

(i) L'affirmation à montrer s'appelle *complementary slackness theorem* en anglais ou le théorème des écarts complémentaire.
Considérer le produit scalaire

$$(b - Ax)^T y. \tag{1}$$

Comme x est admissible pour le PL sous forme primale, on a $b - Ax \ge 0$. Puisque y est une solution admissible du PL sous forme duale, on a $y \ge 0$.

Ainsi (1) est 0 si et seulement si pour tout $i = 1, \dots, m$ on trouve $b - a_i^T x = 0$ ou $y_i = 0$. Alors il suffit de démontrer que (1) est 0 ssi x et y sont des solutions optimales.

On constate que

$$(b - Ax)^T y = b^T y - x^T A^T y = b^T y - x^T c.$$

La deuxième égalité repose sur le fait que y est admissible pour le PL sous forme duale. La dualité nous donne que x et y sont optimales si et seulement si $b^T y = c^T x$. En d'autres termes, (1) est 0 si et seulement si x et y sont des solutions optimales.

(ii) Le PL sous forme duale est le suivant :

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 8y_2 + 22y_3 + 23y_4 \\ \text{sous contraintes} \quad & 2y_1 + y_2 + 3y_3 + y_4 = 1 \\ & y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 5y_4 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{aligned}$$

On constate que la solution $(4/3, 10/3)$ satisfait les deux premières contraintes du PL sous forme primale avec égalité, alors que les deux dernières contraintes sont satisfaites strictement avec inégalité. En appliquant la première partie de l'exercice, on obtient que *si* x est optimale, alors *toute* solution optimale y du PL sous forme duale satisfait $y_3 = y_4 = 0$.

Alors les deux inégalités du PL sous forme duale peut être réécrites comme suit :

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 &= 1 \\ y_1 + 2y_2 &= 1. \end{aligned}$$

Le système est de plein rang, donc il existe une solution unique : $y_1 = y_2 = \frac{1}{3} \geq 0$. Alors $y = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ est admissible. La première partie nous donne que x et y sont des solutions optimales.

On peut le vérifier en calculant leurs valeurs de l'objectif : $6y_1 + 8y_2 + 22y_3 + 23y_4 = \frac{14}{3} = x_1 + x_2$. La dualité faible nous certifie l'optimalité.

Exercice 2

Soit $<_{lex}$ l'ordre lexicographique comme défini en cours pour $\mathbb{R}^n$. Soient $p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon)$ deux polynômes de degré n :

$$p_1(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon^i, \qquad p_2(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} b_i \varepsilon^i$$

Démontrer qu'il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que pour tous ε avec $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$:

$$p_1(\varepsilon) < p_2(\varepsilon) \qquad \text{si et seulement si} \qquad \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} <_{lex} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Solution

Soit $0 \leq k \leq n$ le plus petit index tel que la composante correspondante du vecteur $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est non-nulle (est donc strictement négative). Considérons la différence des polynômes p_1 et p_2. On trouve

$$p_1(\varepsilon) - p_2(\varepsilon) \leq \varepsilon^k(a_k - b_k) + \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon^i(a_i - b_i)$$

Clairement, on a $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon^i(a_i - b_i) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \sum_{i=k}^{n-1} \varepsilon^i(a_{i+1} - b_{i+1}) = 0$. Donc il existe $\varepsilon^* > 0$ tel que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sum_{i=k+1}^{n} \varepsilon^i(a_i - b_i) < \varepsilon^k(b_k - a_k)$ pour tous $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$. Alors on obtient $p_1(\varepsilon) < p_2(\varepsilon)$ pour tous $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$.

Exercice 3

Étant donné un oracle qui trouve une solution admissible du polyèdre

$$P = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}} \ : \ \tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}\}$$

ou affirme qu'il n'y en a pas, démontrer qu'il est possible de donner une solution *optimale* du programme linéaire

$$\max\{c^T x \ : \ x \in \mathbb{R}^n; \ Ax \leq b\},$$

avec une *seule* interrogation de l'oracle, si tant est que le PL est admissible et borné.

Indication : Utiliser la dualité !

Solution

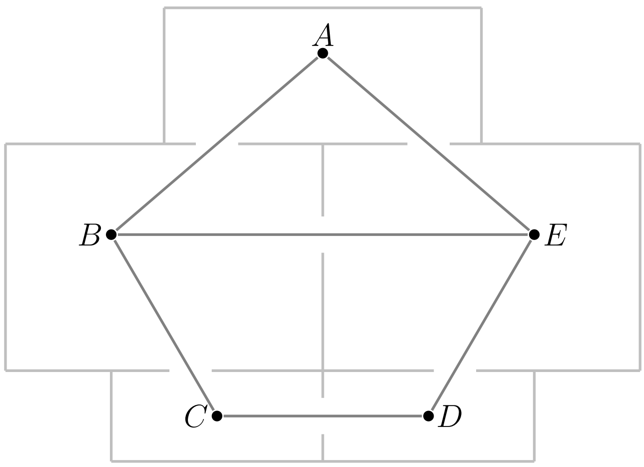
Le PL est admissible et borné, donc il existe une solution optimale. La dualité forte nous dit que le PL dual $\min\{b^T y : A^T y = c, \ y \geq 0\}$ est aussi admissible et borné. En plus, on a $b^T y^* = c^T x^*$ pour des solutions optimales x^* et y^*.
Donc chaque point (x^*, y^*) dans le polyèdre

$$\begin{aligned} c^T x &= b^T y \\ Ax &\leq b \\ A^T y &= c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

nous donne des solutions optimales. Alors on trouve une solution optimale du PL sous forme primale (et en même temps pour le PL sous forme duale) avec une seule interrogation de l'oracle.

Exercice 4 (Δ), ($*$)

Considérons le jeu suivant, avec un voleur et un gardien. On se trouve dans un petit musée avec cinq salles d'exposition. Elles sont connectées par des portes comme figuré sur le plan du musée ci-dessous. Au même moment, le voleur et le gardien choisissent chacun une salle. Si la salle choisie est la même ou si les salles sont connectées, le gardien gagne. Sinon, le voleur remporte la victoire.
Trouver la matrice des bénéfices du voleur où la valeur $+1$ représente le succès et -1 l'échec. Déterminer ensuite une stratégie mixte qui donne la plus grande valeur au voleur.



Indication : Utiliser le théorème Minimax et SAGE.

Solution

Pour trouver la matrice des bénéfices du voleur, on donne une valeur 1 au voleur si le gardien ne le voit pas et -1 sinon. L'ordre des lignes et colonnes correspondent à l'ordre A, B, C, D, E. On considère le voleur comme le joueur qui choisit entre les lignes (et le gardien choisit entre les colonnes). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans la preuve du théorème Minimax vue en cours il est donné un programme linéaire qui trouve une stratégie optimale du joueur des lignes :

$$\begin{array}{rc} \max & x_0 \\ \text{sous contraintes} & \mathbf{1}x_0 \leq Mx \\ & \sum_{i=A}^{E} x_i = 1 \\ & x_A, \ldots, x_E \geq 0 \end{array}$$

Les variables $x_A, \ldots, x_E$ déterminent les probabilités avec lesquelles le voleur choisit les salles. Le PL sous forme standard est

$$\begin{array}{rl} \max & \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} x \\ \text{sous contraintes} & \begin{pmatrix} \mathbf{1} & M \\ 0 & \mathbf{1}^T \\ 0 & -\mathbf{1}^T \\ \mathbf{0} & -I_5 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ -1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec l'algorithme du simplexe de l'exercice SAGE, on trouve $x = (-1/3, 1/3, 0, 1/3, 1/3, 0)$ et le certificat $\lambda = (0, 1/3, 1/3, 0, 1/3, 0, 1/3, 0, 2/3, 0, 0, 0)$.
La stratégie mixte optimale du voleur est donc de choisir la salle A avec probabilité 1/3, C avec 1/3, D avec 1/3 et B, E avec probabilité 0. Sa valeur optimale est $-1/3$.