Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 4 17 mars 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre une solution écrite à l'exercice 2 avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. On peut obtenir un point bonus cette semaine. L'exercice à rendre est le même pour tous les étudiants.
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Résoudre le programme linéaire

$$\max\{c^T x\colon Ax \leq b\}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \\ -2 & 1 & -5/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 7 \\ -2 \\ 2 \\ -7/2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } c^T = (-5, 3, 4, -1)$$

à l'aide de l'algorithme du simplexe. Commencer avec le toit initial défini par les 4 premières lignes. Vous pouvez utiliser SAGE pour déterminer les résultats intermédiaires de l'algorithme du simplexe.

Solution

```
sage: A =
    matrix(QQ,8,4,[-1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,-1,2,-3,5,-1,-2,1,-5/2,2,1,1,1/2,0,-3,1,-1,2])
sage: load "/Users/adrianbock/disopt/Opt2011/MatrixUtils.py"
sage: b = vector([0,10,7,-2,2,-7/2,10,-2])
sage: c = vector([-5,3,4,-1])
sage: L = [0,1,2,3]sage: z = A.matrix_from_rows(L).solve_left(c)
sage: x = A.matrix_from_rows(L).solve_right(from_list(b,L))
sage: A*x - b
(0, 0, 0, 0, 1, 0, 7/2, 9)
sage: y = A.matrix_from_rows(L).solve_left(-A.row(4))
sage: ratios(z,y)
```

```
(-1, -1, 4/5, 1)
sage: L.remove(2)
sage: L.append(4)
sage: x = A.matrix_from_rows(L).solve_right(from_list(b,L))
sage: z = A.matrix_from_rows(L).solve_left(c)
sage: z
(33/5, 27/5, 1/5, 4/5)
sage: A*x - b
(0, 0, -1/5, 0, 0, 1/2, 17/5, 46/5)
sage: y = A.matrix_from_rows(L).solve_left(-A.row(5))
sage: ratios(z,y)
(33/5, -1, -1, -1)
sage: L.remove(0)
sage: L.append(5)
sage: x = A.matrix_from_rows(L).solve_right(from_list(b,L))
sage: z = A.matrix_from_rows(L).solve_left(c)
sage: z
(87/10, 101/10, 41/10, 33/5)
sage: A*x - b
(-1/2, 0, -2/5, 0, 0, 0, 19/5, 79/10)
sage: y = A.matrix_from_rows(L).solve_left(-A.row(6))
sage: ratios(z,y)
(29/3, -1, -1, -1)
sage: L
[1, 3, 4, 5]
sage: L.remove(1)
sage: L.append(6)
sage: x = A.matrix_from_rows(L).solve_right(from_list(b,L))
sage: z = A.matrix_from_rows(L).solve_left(c)
sage: z
(68/3, 7, 43/3, 29/3)
sage: A*x - b
(-47/18, -38/9, -34/9, 0, 0, 0, 0, 13/18)
sage: y = A.matrix_from_rows(L).solve_left(-A.row(7))
sage: ratios(z,y)
(204/41, 21/5, 129/37, 87/17)
sage: L
[3, 4, 5, 6]
sage: L.remove(5)
sage: L.append(7)
sage: x = A.matrix_from_rows(L).solve_right(from_list(b,L))
sage: z = A.matrix_from_rows(L).solve_left(c)
sage: z
(251/37, 44/37, 114/37, 129/37)
sage: z * from_list(b,L)
468/37
sage: L
[3, 4, 6, 7]
sage: x
(106/37, 208/37, 112/37, 2)
sage: c*x
468/37
```

Donc la solution optimale est $x^* = \frac{1}{37}\begin{pmatrix}106\\208\\112\\74\end{pmatrix}$ avec une valeur de l'objectif $468/37$.

Le toit final est défini par les lignes $4, 5, 7, 8$ de A.

Exercice 2 $(*), (\Delta)$

Considérer le programme linéaire $\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}$. Soit B un toit du PL.

(i) Considérer ce système d'égalités pour $j \in B$:

$$\begin{aligned} a_j v &= -1 \\ a_i v &= 0 \quad \forall i \in B, \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{1}$$

Démontrer l'affirmation suivante : Si x est une solution admissible du PL-toit et v est une solution du système (1), on trouve que pour tous $\lambda > 0$, le vecteur $x + \lambda v$ est aussi une solution admissible du PL-toit.

(ii) Donner une preuve pour cette proposition :
Le *sommet* du toit B est l'unique solution optimale du PL-toit si et seulement si c est une combinaison conique des vecteurs a_i, $i \in B$ avec des facteurs strictement positifs.

Solution

Soit A_B la matrice composée par les lignes de A dans le toit B.

(i) Comme x est admissible pour le PL-toit, on a

$$A_B x \leq b_B.$$

Comme v est une solution de (1), on trouve $A_B v \leq 0$. Soit $\lambda > 0$. Or, on déduit

$$A_B(x + \lambda v) = A_B x + \lambda A_B v \leq b_B + 0 \leq b_B,$$

donc $x + \lambda v$ est admissible pour le PL-toit.

(ii) Comme B est un toit, il existe $y \geq 0$ tel que $c = A_B^T y$.

On va démontrer la contraposition de l'affirmation : Si $y_j = 0$ pour un $j \in B$, le sommet du toit n'est pas l'unique solution optimale du toit. Après, on trouve un $j \in B$ tel que $y_j = 0$ s'il y a plusieurs solutions optimales.

Pour la première partie, soit $y_j = 0$ pour $j \in B$. Soit x^* le sommet du toit, c'est-à-dire $A_B x^* = b_B$. Soit v la solution du système (1). Ainsi que nous l'avons vu dans la première partie de l'exercice, $x^* + v$ est une solution admissible du PL-toit.
On trouve $y^T A v = 0$, car $a_i v = 0$ pour tous $i \neq j$, et $y_j = 0$. On déduit

$$c^T(x^* + v) = y^T(A_B x^* + A_B v) = c^T x^* + \underbrace{y^T A_B v}_{=0} = c^T x^*.$$

Comme x^* est optimal, on sait que $x^* + v$ est une solution optimale différente.

Pour la deuxième partie, soit x' une solution optimale du PL-toit différente de x^*. Donc

$$0 = c^T x^* - c^T x' = y^T(A_B x^* - A_B x') = y^T(b_B - A_B x').$$

La troisième égalité résulte du fait que x^* est le sommet du toit. On sait que $y \geq 0$. En plus, on a $b_B - A_B x' \geq 0$, car x' est admissible. Alors,

$y^T(b_B - A_B x')$ est un produit scalaire de vecteurs positifs qui vaut 0. Donc on a $y_i = 0$ ou $b_i - a_i^T x' = 0$ pour chaque $i \in B$. Comme x' n'est pas le sommet de B, il existe $j \in B$ tel que $b_j > a_j^T x'$. Donc $y_j = 0$.

Exercice 3

Soit $x^* \in P$ un *sommet* du polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$, c'est-à-dire qu'il existe $A'x^* = b'$ où A' est composée par n lignes de A qui sont linéairement indépendantes et b' est formé par les composantes correspondantes de b.

Démontrer qu'il existe un hyperplan dont l'intersection avec P est exactement $\{x^*\}$. En autres termes, il existe un vecteur c tel que x^* est l'unique solution optimale du programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon Ax \leq b\}.$$

Solution

L'ensemble B des lignes de A correspondant à la matrice A' satisfait trivialement les conditions i) et ii) d'un toit. On choisit arbitrairement une combinaison conique des lignes de A' avec des facteurs strictement positifs. Donc avec le lemme vu en cours on sait que B est un toit. Le sommet x^* est clairement le sommet du toit B. D'après la dualité faible démontré en cours, la valeur de l'objectif du sommet d'un toit est une borne supérieure pour tous les points admissibles. Comme $x^* \in P$, le sommet est admissible et il atteint la borne supérieure. x^* est donc optimal et unique grâce à l'exercice 2.