Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 3 **10 mars 2011**

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre une solution à l'exercice SAGE sur `http ://disoptsrv1.epfl.ch/opt11/` avant le début du cours du **24 mars** et une version écrite avant (le début de) la séance.

Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

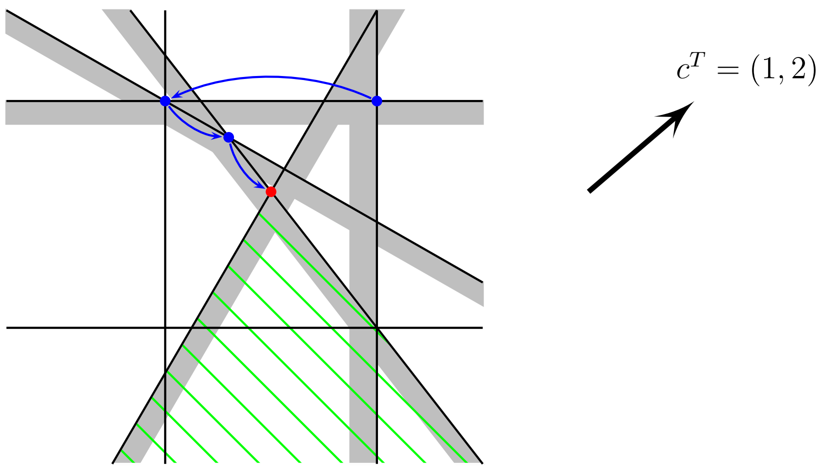
Résoudre le programme linéaire suivant à l'aide de l'algorithme du simplexe.

$$
\begin{array}{lll}
\max & x_1 + 2x_2 & \\
& -4x_1 + 2x_2 & \leq -2 \\
& 2x_1 + 3x_2 & \leq 15 \\
& 3x_1 + 2x_2 & \leq 12 \\
& x_1 & \leq 4 \\
& x_2 & \leq 5
\end{array}
$$

Commencer avec le toit initial décrit par les deux dernières contraintes et procéder de manière itérative pour trouver le toit optimal.

Indication : Faites un dessin pour déterminer la ligne qui entre dans le toit et la ligne qui sort le toit dans chaque itération. Justifiez votre choix.

Solution



On trouve le toit optimal $B^* = \{1, 3\}$ et son sommet $x_{B^*} = (2, 3)$ qui est la solution optimale du programme linéaire.

Exercice 2

Considérer le programme linéaire

$$
\begin{array}{lll}
\max & 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \\
& 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 & \leq \; 2 \\
& 2x_1 + x_2 + 4x_3 & \leq \; 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \leq \; 8 \\
& -3x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq \; 1 \\
& -3x_1 - x_2 + x_3 & \leq \; -1
\end{array}
$$

Trouver toutes les combinaisons des contraintes qui décrivent un toit.

Indication : Vous pouvez utiliser un logiciel comme SAGE.

Solution

En utilisant SAGE, vous trouvez que chaque sous-ensemble de trois lignes de A est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc les conditions i) et ii) sont toujours satisfaites. On détermine aussi les toits :

- $B_1 = \{1, 2, 3\}$ est un toit, car $\lambda_1 = (1, 1, 1)$ nous donne une combinaison conique de c à partir des lignes a_1, a_2, a_3.
- $B_2 = \{1, 2, 5\}$ est un toit. Certificat : $\lambda_2 = (21/13, 1, 36/13)$
- $B_3 = \{1, 3, 4\}$ est un toit. Certificat : $\lambda_3 = (3/2, 19/6, 13/6)$

Si vous désirez un dessin, vous pouvez taper le code suivant dans le notebook de SAGE :

```
P = Polyhedron(ieqs = [[3,-2,-1,-4],[8,-3,-2,-5],[1,3,2,2],[2,-4,-2,5],[-1,3,1,-1]])
c = line3d([(0,0,0),(9,5,4)], arrow_head=True, color='red')
a1 = line3d([(0,0,0),(2,1,4)], arrow_head=True, color='green')
a2 = line3d([(0,0,0),(3,2,5)], arrow_head=True, color='blue')
a3 = line3d([(0,0,0),(4,2,-5)], arrow_head=True, color='yellow')
a4 = line3d([(0,0,0),(-3,-1,1)], arrow_head=True, color='purple')
a5 = line3d([(0,0,0),(-3,-2,-2)], arrow_head=True, color='orange')
p = P.show()
C1 = Cone([(-3,-2,-2),(3,2,5),(4,2,-5)])
C2 = Cone([(2,1,4),(3,2,5),(4,2,-5)])
C3 =  Cone([(2,1,4),(-3,-1,1),(4,2,-5)])
c3 = C3.plot()
c2 = C2.plot()
c1 = C1.plot()
base = point((1,1,0), color='green')
show(c + c1 + p,aspect_ratio=[1,1,1])
```

Exercice 3

Une droite D est un ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \colon x = \lambda v + u \text{ pour } \lambda \in \mathbb{R}\}$ défini par deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Démontrer qu'un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ non-vide contient une droite (c'est-à-dire qu'il existe $u, v \in \mathbb{R}^n$ avec $a \neq 0$ tel que $D(u, v) \subseteq P$) si et seulement si A n'est pas de plein rang-colonne.

Solution

Supposons que P contient une droite $D(u, v)$. On va démontrer que $v \in \ker(A)$, c'est-à-dire que les colonnes de A sont linéairement dépendantes. S'il existe une ligne A_i telle que $A_i^T v = \beta \neq 0$, on trouve $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_i^T u + \lambda\beta > b_i$. Donc $x := u + \lambda v \notin P$, car $A_i^T x > b_i$. C'est une contradiction, parce que P contient la droite $D(u, v) = \{x \colon x = u + \lambda \cdot v,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Si par contre A n'est pas de plein rang-colonne, on prend un point $u \in P$ et un élément v non-nul du noyau $\ker(A)$. Donc $u + \lambda \cdot v \in P$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que P contient la droite $D(u, v)$.

Exercice 4

Soient

(1) $$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$$

et

(2) $$\max\{c'^T y \colon y \in \mathbb{R}^{n'},\ A'y \leq b\}$$

les programmes linéaires avant et après la transformation à l'aide de l'élimination de Gauss-Jordan avec la notation vue en cours. Supposons que les n'' dernières composantes de $c^T \cdot U$ sont zéros et que le PL (2) est admissible.

Soit y^* une solution optimale du PL (2) et λ' un certificat de l'optimalité, c'est-à-dire $\lambda'^T A' = c'^T$ et $\lambda'^T b = c'^T y^*$. Donner une solution optimale du PL (1) et un certificat de l'optimalité.

Solution

Une solution optimale est $x^* = U \begin{pmatrix} y^* \\ 0 \end{pmatrix}$. Pour démontrer l'optimalité de x^*, on choisit $\lambda = \lambda'$ et on obtient

$$\lambda^T \cdot A = \lambda^T \cdot A \cdot U \cdot U^{-1} = \lambda \cdot [A'\ 0] \cdot U^{-1} = [\lambda'^T A'\ 0] \cdot U^{-1} = [c'^T\ 0] \cdot U^{-1} = c^T \cdot U \cdot U^{-1} = c^T$$

Exercice SAGE $(*), (\Delta)$

Implémenter l'étape (iii) de l'algorithme du simplexe à l'aide de SAGE.

En autres termes, trouver et retourner un nouveau toit B' partant de la description d'un programme linéaire (c'est-à-dire une matrice A et des vecteurs b, c), un toit B et une ligne i contredite par le sommet du toit B. Pour ce faire, utiliser l'interface `def step_3(A,c,B,i)`, où A est une matrice rationelle, c et B sont des vecteurs (à définir p.e. par `vector(QQ, dim)`) et i est un entier.

Solution