Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Optimisation Discrète

Adrian Bock Semestre de printemps 2011

Série 1

24 février 2011

Remarque générale :
Pour obtenir un bonus pour l'évaluation finale, vous pouvez rendre des solutions écrites à l'exercice noté avant (le début de) la séance de la semaine prochaine. Les mathématiciens doivent traiter l'exercice (*). Les autres par contre peuvent choisir entre l'exercice (*) ou (Δ).
Le rendu peut être fait en groupe de trois personnes au plus.

Exercice 1

Démontrer que si $\lambda \geq 0$, on trouve

$$\lambda^T Ax \leq \lambda^T b,$$

pour $\lambda, b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax \leq b$.

Quelle est la relation entre $\lambda^T Ax$ et $\lambda^T b$ si on supprime la condition $\lambda \geq 0$?

Solution

La condition $Ax \leq b$ nous donne aussi $Ax - b \leq 0$. Par définition, l'inégalité $(Ax - b)_i \leq 0$ est vraie pour chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\lambda \geq 0$, on trouve $\lambda_i(Ax - b)_i \leq 0$. La somme des valeurs négatives est aussi négative, donc $\lambda^T(Ax - b) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(Ax - b)_i \leq 0$ et $\lambda^T Ax \leq \lambda^T b$.

Considérons les inégalités suivantes

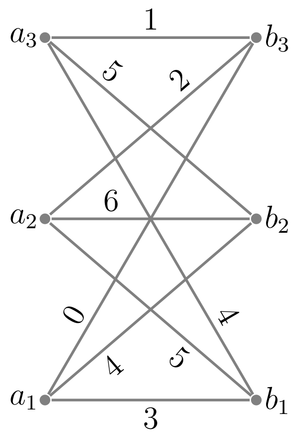
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4. \end{aligned}$$

L'affirmation précédente est contredite pour $\lambda = (1, -1)$ et $x = (1, 1)$.

Exercice 2

Considérons le graphe biparti $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ représenté à droite. On donne des poids c positifs sur les arêtes. Nous cherchons un couplage[1] dans G tel que la somme des poids des arêtes choisies soit maximisée.

1. Rappelons qu'un *couplage* est un ensemble d'arêtes deux à deux non incidentes à un même sommet. Un couplage M est parfait si chaque sommet est incident à exactement une arête $e \in M$.



Démontrer que $M = \Big\{\{a_1, b_2\}, \{a_2, b_3\}, \{a_3, b_1\}\Big\}$ est une solution optimale.

Indication :

(i) Combien de couplages existe-il pour $|\mathcal{A}| = n = |\mathcal{B}|$?
(En d'autres termes, combien de solutions faut-il comparer pour démontrer qu'un couplage est optimal ?)

Le programme linéaire suivant décrit le problème (à voir plus tard dans le Cours)

$$\begin{array}{lrcll} \max & \displaystyle\sum_{e\in\mathcal{A}\times\mathcal{B}} c_e x_e & & & \\ & \displaystyle\sum_{e\in\delta(v)} x_e & \leq & 1 & \forall v \in \mathcal{A}\cup\mathcal{B} \qquad (\delta(v) := \{e \in \mathcal{A}\times\mathcal{B} \mid v \in e\}) \\ & x_e & \geq & 0 & \forall e \in \mathcal{A}\times\mathcal{B} \end{array}$$

(ii) Qu'est-ce que vous trouvez en utilisant l'exercice 1 avec $\lambda = (0, 2, 1, 3, 4, 0)$ et les 6 premières inégalités (pour les nœuds $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$) du programme linéaire ci-dessus ?

Solution

(i) Comme le graphe biparti est complet et les poids sont positifs, il est suffisant de considérer les couplages parfaits. Donc on a $n!$ possibilités, le nombre de permutations pour n éléments.

(ii) Soit A la matrice des 6 premières inégalités et $b = \mathbb{1}$. On trouve facilement

$$\lambda^T Ax = c^T x \leq \lambda^T b = 10,$$

alors la fonction de l'objectif est majorée par 10. Or, la solution donnée (est admissible et) obtient une valeur 10. Donc elle est optimale.

Exercice 3 (Δ)
Considérons le problème

$$\begin{array}{rl} \min & 2x + 3y \\ \text{sous contraintes} & -|x+2| + y \geq -6 \\ & 8 - 2x \leq y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

(i) Reformuler le problème comme un programme linéaire sous la forme standard avec inégalités.

(ii) Trouver une solution optimale.

(iii) Démontrer que votre solution est optimale.

Solution

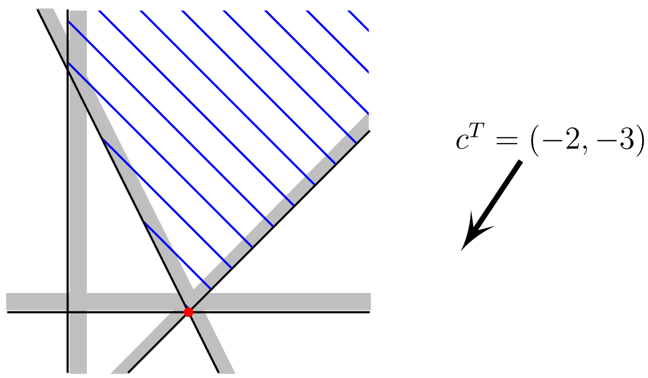
(i) Comme $x \geq 0$, on obtient $|x+2| = x+2$ et donc le programme linéaire

$$\begin{array}{rl} \min & 2x+3y \\ \text{sous contraintes} & -(x+2)+y \geq -6 \\ & 8-2x \leq y \\ & x \geq 0 \\ & y \geq 0. \end{array}$$

En appliquant les règles de transformation vues en cours, on trouve le programme linéaire sous la forme standard avec inégalités

$$\begin{array}{ll} \max & (-2,-3,0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ \text{sous contraintes} & \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(ii)



(iii) Une solution admissible du programme linéaire est $(4,0)$. Elle est optimale car une combinaison $\lambda = (0,1,0,2)$ des contraintes nous donnent $-2x-3y \leq -8$, une borne supérieure de l'objectif qui est atteinte par $(4,0)$.

Exercice 4

Donner une preuve ou un contre-exemple :
L'ensemble des solutions optimales d'un programme linéaire est toujours fini.

Solution

La remarque est clairement fausse. Le programme linéaire

$$\max\{x+y \mid x+y \leq 0\}$$

a une infinité de solutions optimales.
Plus généralement, si le programme linéaire est borné, les solutions forment une face du polyèdre des solutions admissibles. Si la dimension de cette face est au moins 1, il y aura une infinité de solutions optimales.

Exercice 5 (*)

Soit

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

un programme linéaire sous la forme standard avec inégalités, où $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $c \in \mathbb{R}^n$.
Démontrer qu'il existe un programme linéaire équivalent de la forme

$$\min\{\tilde{c}^T x \mid \tilde{A}x = \tilde{b}, x \geq 0, x \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}\} \tag{2}$$

où $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}\times\tilde{n}}$, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{\tilde{m}}$ et $\tilde{c} \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ sont tels que chaque point optimal de (1) correspond à un point optimal de (2) et vice-versa.
On dit que les programme linéaires de la forme (2) sont sous la *forme standard avec égalités.*

Solution
La transformation est faite en trois étapes :

(i) Remplacer chaque variable x_j par deux variables non-négatives x_j^+ et x_j^-, et remplacer chaque apparition de x_j par $(x_j^+ - x_j^-)$.
(ii) Remplacer chaque contrainte de la forme $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$ par une contrainte $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in} + s_i = b_i$, où s_i est une nouvelle variable d'écart non-négative.
(iii) Multiplier l'objectif par -1 pour obtenir un problème de minimisation.

En combinant ces trois étapes, nous pouvons écrire le programme linéaire sous la forme

$$\begin{aligned} \min \quad & -c^T x^+ + c^T x^- \\ \text{sous contraintes} \quad & Ax^+ - Ax^- + s = b \\ & x^+ \geq 0 \\ & x^- \geq 0 \\ & s \geq 0 \end{aligned}$$

Si $\tilde{c} = \begin{pmatrix} -c & c & 0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -A & I \end{pmatrix}$, où I est la matrice identité $m \times m$, c'est la forme souhaitée.
Pour une solution admissible x du programme linéaire original, on trouve une solution admissible $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ & x^- & s \end{pmatrix}^T$ du programme reformulé en fixant la partie positive de x à x^+, la partie négative à x^- et $s = b - Ax$. Il est facile de vérifier que $\tilde{x}$ est admissible avec une valeur de l'objectif $\tilde{c}^T\tilde{x} = -c^T x$.
Réciproquement, si $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^+ & x^- & s \end{pmatrix}^T$ est une solution admissible du programme reformulé, alors il est facile de vérifier que $x = x^+ - x^-$ est une solution du programme linéaire originale avec une valeur de l'objectif $c^T x = -\tilde{c}^T\tilde{x}$.
En particulier, cela implique que les solutions optimales se correspondent.