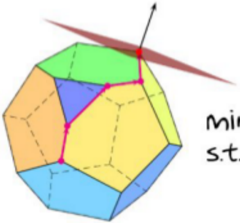
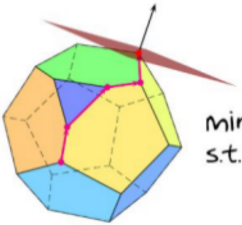
La géométrie de la programmation linéaire



$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \leq B$$

La géométrie de la programmation linéaire

- Polyèdres et sommets



$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$

Polyèdres

Un ensemble P de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est un *polyèdre* si
$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leqslant b\}$ pour une matrice A et un vecteur b.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \ b \in \mathbb{R}^m$

$\max \ c^T \cdot x$

$Ax \leq b$

$x \in \mathbb{R}$

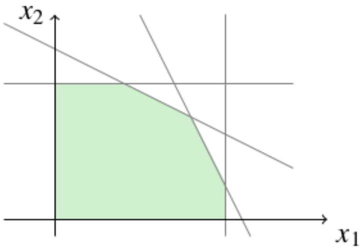
solutions admissible

$\subseteq \ P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$

Polyèdres

Un ensemble P de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est un *polyèdre* si
$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leqslant b\}$ pour une matrice A et un vecteur b.

Exemple: Production de boissons minérales



$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 44 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 30$$

$$-x_1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 \geq 0$$

Polyèdres

Un ensemble P de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ est un *polyèdre* si $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ pour une matrice A et un vecteur b.

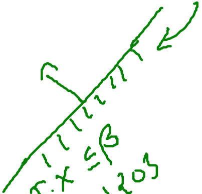
Exemple:

$P = \emptyset$

demi-espace $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T.x \leq \beta\}$

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\mathbf{0}^T x}_{=0} \leqslant -1\}$

$0 > -1$



$a^T.x \leq \beta$

$a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

intersection de demi-espaces.

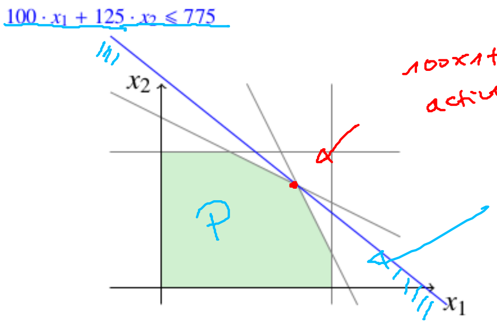
Inégalités valides et actives

Une inégalité $a^T x \leqslant \beta$ est *valide* pour un polyèdre P si chaque $x^* \in P$ satisfait $a^T x^* \leqslant \beta$.

Une inégalité $a^T x \leqslant \beta$ est *active* ~~si~~ sur $x^* \in \mathbb{R}^n$ ~~if~~ si $a^T x^* = \beta$.

sur x^*

Exemple: Production de boissons minérales



$100x_1 + 125 \cdot x_2 \leq 775$ est active sur ~~(4,4)~~ (4,3)

valide pour P

Quiz

Lesquelles parmi les inégalités suivantes sont valides pour chaque polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$

n'est pas valide pour $P = \{(-1,-1,\dots,-1)\}$

- $x_1 \geqslant 0$
- $\mathbf{0}^T x \leqslant -1$ ← seulement valide pour $\emptyset$
- $\mathbf{0}^T x \leqslant 1$ ←

Dimension (# de variables)

Supposons que $P \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ est un polyèdre non-vide contenant $\mathbf{1}$ et de plus que les inégalités $x_i \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, n$ sont valides pour P.

Lesquelles parmi les inégalités suivantes sont valides et actives à $\mathbf{1}$:

valide pour P et active

$x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$, $\vdots$, $x_n \leq 1$ } +

$x_1 + \dots + x_n \leq n$ ⇒ valide pour P

- $\mathbf{1}^T x \leqslant n$ ←
- $\mathbf{1}^T x \leqslant 1$ ← ~~ooo~~ violé par $(1,\dots,1)^T$
- $\mathbf{0}^T x \leqslant 1$ ← valide mais pas active à $\mathbf{1}$

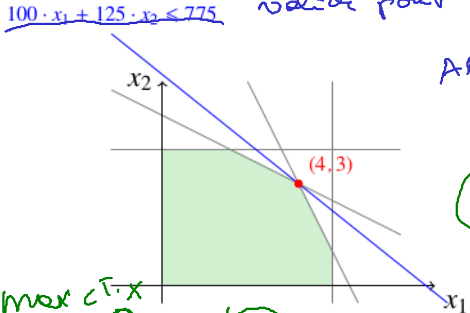
Sommets

Un point $x^* \in P$ est un *sommet* de P s'il existe une inégalité $a^T x \leqslant \beta$ telle que

- $a^T x \leqslant \beta$ est valide pour P et
- $a^T x \leqslant \beta$ est active à x^* et inactive à tout autre point en P.

valide pour P et active à $x^* = (4,3)$

Alors $(4,3)$ est un sommet.



$\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^n$ tel que x^* est la solution optimale unique du PL

$$\max_{x \in P} c^T x$$

Quiz

Def. alternative: $c = (1, \dots, 1)^T$

Supposons que $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est un polyèdre tel que $x_i \leqslant 1$ sont valides pour $i = 1, \dots, n$. Est-ce que ceci est juste:

Si $x^* = (1, 1, \dots, 1)^T$ fait partie de P, ainsi x^* est un sommet de P.

$x_1 \le 1, \dots, x_n \le 1$, et $x^* = (1, \dots, 1)^T \in P$

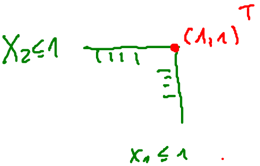
Inégalité $x_1 + \dots + x_n \le n$ est valide pour P

active à x^*. Si $y^* \in P$

$y^* \neq x^*$ $\exists\, j \in \{1, \dots, n\}$ tel que

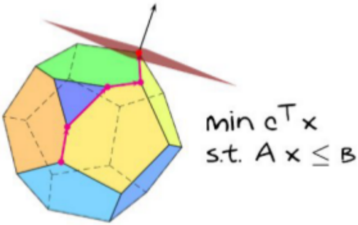
$y^*_j < 1$ alors $y^*_1 + \dots + y^*_n < n$

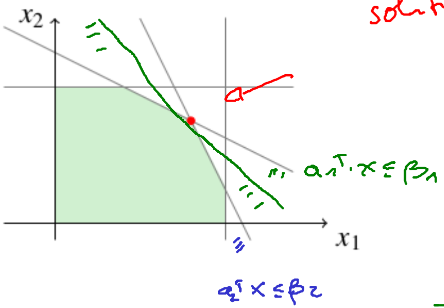
$\Rightarrow$ n'est pas active à y^* $\Rightarrow$ x^* est un sommet



La géométrie de la programmation linéaire

- Sommets et solutions basiques





solution unique du système

$$a_1^T \cdot x = \beta_1$$
$$a_2^T \cdot x = \beta_2$$

Idée: x^* est un sommet

si et seulement si $A_1 x \le b_1$ est le sous-système des inégalités $Ax \le b$ qui sont active à x^*

alors $\operatorname{rank}(A_1) = n$

$\iff$ x^* est sol. unique de $A_1 x = b_1$

Quiz: Algèbre linéaire

Supposons

Let $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Lesquels des arguments suivants ne sont pas équivalents à

noyaux(A)

$$\ker(A) = \{\mathbf{0}\} \,?$$

- Les colonnnes de A sont linéairement indépendantes e
- Les lignes de A sont linéairement indépendantes $A = (1,1)$ Noyaux
- A contient n lignes linéairement indépendantes e
- A contient n colonnes linéairement indépendantes e
- L'image de A est $\mathbb{R}^m$ encore $A = (1,1)$
- Le rang colonnes de A est n
- Le rang lignes de A est n
- Le rang de A est n

$\{0\} \subsetneq \{\lambda(1,-1) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

Sous-système des inégalités actives

$Ax \leq b$ $\quad a_1^T \cdot x \leq b_1$

$\vdots$

$a_m^T \cdot x \leq b_m$

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}, A \in \mathbb{R}^{mn}, b \in \mathbb{R}^m$$

Pour $x^* \in \mathbb{R}^n$, $I = \{i : 1 \leqslant i \leqslant m,\ a_i^T x^* = b_i\}$ sont *les indices des inégalités actives à x^**.

Exemple: $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leqslant b\}$, $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$I = \{1, 4\}$

Sous-système des inégalités actives

Soit $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ et $A_I = \begin{pmatrix} a_{i_1}^T \\ \vdots \\ a_{i_k}^T \end{pmatrix}$, $b_I = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_k} \end{pmatrix}$

$A_I x \leqslant b_I$ est un *sous-système* d'inégalités actives à x^*.

Exemple: $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leqslant b\}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \{1, 4\}$

$b_I = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Solutions basiques

Considérer un polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$. Un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ est une *solution basique* si $\mathrm{rank}(A_I) = n$.

Si $x^* \in P$, x^* est une *solution basique admissible*.

Exemple: $P = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax \leqslant b\}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, x_1^* = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, x_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

x_1^* n'est pas valide

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A_1) = 3$ alors x_1^* est solution basique

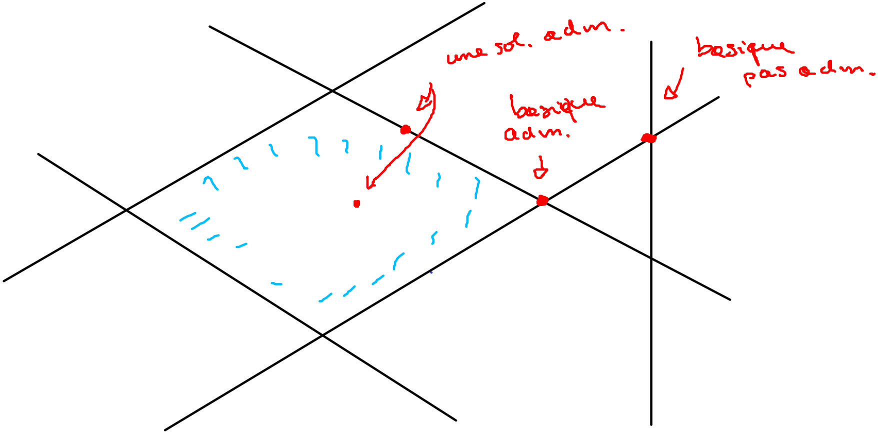
x_2^* est admissible

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rank}(A_2) = 3$ alors x_2^* est solution basique adm.

Quiz

Lesquels de ces points sont des solutions basiques?



Sommets et solutions basiques

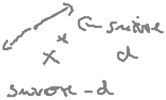
Théorème

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ et $x^* \in P$. Alors x^* est un sommet de P si et seulement si x^* est une solution basique admissible.

$\Rightarrow$ " Soit x^* un sommet et supposons que x^* n'est pas basique "

$Ax \leq b$ → $A_1 x \leq b_1$ ← active ; $\quad \text{rank}(A_1) < n$

$Ax \leq b$ → $A_2 x \leq b_2$ ← in-active



Alors $\exists\, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A_1 \cdot d = 0$

Dès que x^* est un sommet, $\exists\, c \in \mathbb{R}^n$ tel que

x^* est sol. opt. unique du PL $\max c^T.x$, $Ax \leq b$

$\exists\, \varepsilon > 0$ tel que

$P \ni x^* + \varepsilon \cdot d$

$P \ni x^* - \varepsilon \cdot d$

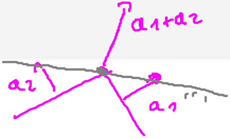
$c^T(x^* + \varepsilon . d) < c^T . x^*$

$c^T(x^* - \varepsilon \cdot d) < c^T . x^*$

$\varepsilon c^T . d < 0$

$\Rightarrow -\varepsilon . c^T . d < 0$

Sommets et solutions basiques



Théorème

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ et $x^* \in P$. Alors x^* est un sommet de P si et seulement si x^* est une solution basique admissible.

$\Longleftarrow$ " Soit x^* basique et adm. "

$Ax \leq b$ → $A_1 x \leq b_1$ ← active

→ $A_2 x \leq b_2$ ← in-active

But : construire $c \in \mathbb{R}^n$ tel que x^* est sol. opt. unique du PL $\max c^T \cdot x$, $Ax \leq b$. Soit $A_1 x \leq b_1 \equiv \begin{cases} a_1 x \leq b_1 \\ \vdots \\ a_k^T \cdot x \leq b_k \end{cases}$

$c = (a_1 + \cdots + a_k)$, $\delta = b_1 + \cdots + b_k$ alors $c^T \cdot x \leq \delta$ est valide pour P est active à x^*.

Maintenant: Il faut démontrer que $\forall y^* \neq x^*, y^* \in P$:

$c^T \cdot y^* < \delta$

Sommets et solutions basiques

Théorème

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ et $x^* \in P$. Alors x^* est un sommet de P si et seulement si x^* est une solution basique admissible.

$c = (a_1 + \cdots + a_k)$, $\delta = b_1 + \cdots + b_k$ alors $c^T \cdot x \leq \delta$ est valide pour P est active à x^*.

Maintenant: Il faut démontrer que $\forall y^* \neq x^*$, $y^* \in P$: $c^T \cdot y^* < \delta$

$A_1 \cdot y^* \leq \neq b_1$

$\exists j \in \{1, \dots, k\}$ $a_j^T \cdot y^* < b_j$

Mais dès que $y^* \in P$: $\forall i = 1, \dots, k$ $a_i^T \cdot y^* \leq b_i$

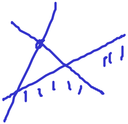
Alors: $\sum_{i=1}^{k} a_i^T \cdot y^* = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \underbrace{a_i^T \cdot y^*}_{\leq b_i} + \underbrace{a_j^T \cdot y^*}_{< b_j} < \sum_{i=1}^{k} b_i = \delta$ ∎

Algorithme énumérant tous les sommets

Generer $\binom{m}{n} = \{ I \subseteq \{1, \dots, m\} : |I| = n \}$

$S = \emptyset$

FOR ALL $I \in \binom{m}{m}$



Si A_I est inversible ($\Leftrightarrow$ rang$(A_I) = n$)

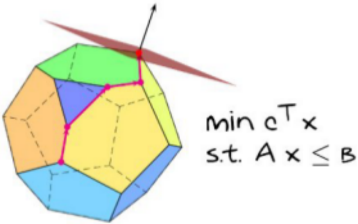
calcule $x^* = A_I^{-1} \cdot b_I$

Si x^* est admissible

$S := S \cup \{x^*\}$

La géométrie de la programmation linéaire

- Sommets optimaux



Optimalité des sommets

$P = \{x \in \mathbb{R}^n ;\ Ax \le b\}$

Théorème

Si un programme linéaire $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$ est admissible et borné et si $\operatorname{rank}(A) = n$, le PL admet une solution optimale qui est un sommet.

<u>Idée :</u> Soit $x^* \in P$, x^* pas un sommet

$Ax \le b \to A_1 x \le b_1 \leftarrow$ active rang$(A_1) < n$

$\to A_2 x \le b_2 \leftarrow$ in-active

VOIR UNE MANIÈRE de construire $y^* \in P$. $c^T y^* \ge c^T x^*$

$Ax \le b \to \tilde{A}_1 x \le \tilde{b}_1 \leftarrow$ active y^*

$\to \tilde{A}_2 x \le \tilde{b}_2 \leftarrow$ in-active y^*

Alors rank$(\tilde{A}_1) \ge$ rang$(A_1) + 1$

REPETER au plus n fois $\Rightarrow$ un sommet $\tilde{y}$, $c^T \tilde{y} \ge c^T x^*$

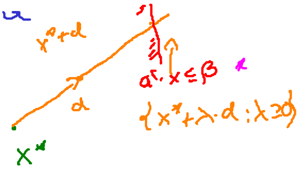
Optimalité des sommets

Soit $x^* \in P$, x^* pas un sommet

$Ax \le b \rightarrow A_1 x \le b_1 \leftarrow$ active

$ \rightarrow A_2 x \le b_2 \leftarrow$ in-active

rang$(A_1) < n$



$\exists\, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: $A_1 \cdot d = 0$. S.P.d.G.

$c^T \cdot d \ge 0$

CAS 1: $c^T \cdot d > 0$: $c^T(x^* + \lambda\cdot d) = c^T\cdot x^* + \lambda\cdot \underbrace{c^T\cdot d}_{>0}$

PL borné, $L = \{\lambda \ge 0 : x^* + \lambda\cdot d \in P\}$ est bornée par dessus.

Soit $a^T \cdot x \le \beta$ une inégalité qui est active au "dernier point" du rayon (avant quitter P).

$y^* = x^* + \lambda^* \cdot d$, $y^* \in P$, $A_1 \cdot x \le b_1$ active à y^*

$\lambda^* = \max L$

$a^T x \le \beta$ active à y^*

Optimalité des sommets

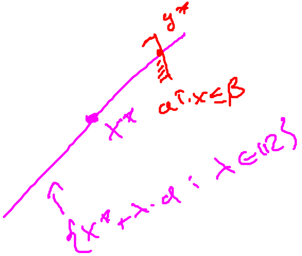
$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} A_1 \\ a^T \end{pmatrix} = \mathrm{rang}(A_1)+1$, a^T n'est pas une combinaison linéaire des lignes de A_1

$\left(a^T = u^T \cdot A_1 , \quad a^T \cdot d = u^T \cdot A_1 \cdot d = 0 \quad ↯ \right)$

CAS 2 : $c^T \cdot d = 0$

$A \cdot d \neq 0$

$\mathrm{rang}(A) = n$



$c^T \cdot y^* = c^T \cdot x^*$.

Argument est très similaire

Quiz

Considérer

$$\begin{array}{rrcl} \max & x_1 + x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leqslant & 1 \\ & x_1 & \leqslant & 1 \\ & x_2 & \leqslant & 1 \end{array}$$

Lesquelles de ces affirmations suivantes sont vraies?

- Chaque solution optimale est un sommet.
- Il existe une solution optimale qui est un sommet.
- Il y a une infinité de solutions optimales.

La géométrie de la programmation linéaire

- Un premier algorithme (non efficace) pour la progammation linéaire

Algorithme pour PL bornés avec sommets

Résoudre $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$ borné

rank$(A) = n$

$S := \emptyset$

`pour chaque` $B \in \binom{[m]}{n}$

  `if` A_B est inversible et $x_B = A_B^{-1} b_B$ admissible

    $S := S \cup \{x_B\}$

`if` $S = \emptyset$

  PL inadmissible

`else`

  return $x \in S$ qui maximise la valeur d'objectif $c^T x$

Pourquoi inefficace ?

$\# \{ \{ B \subseteq \{1, \dots, m\} : |B| = n \} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$m = 200$ inegalités

$n = 100$ VARS.

Generer 2^{100} ensembles B

$\boxed{m = 2n \quad \binom{m}{n} =}$ $\frac{2n (2n-1) \cdots (n+1)}{n (n-1) \cdots 1}$

$\geq 2 \quad \geq 2 \quad \geq 2$

$\binom{m}{n} \geq 2^n$

2^{25} : compte jusqu'à 2^{25} ≈ 1 sec.

Alors pendant une année 2^{50} peuvent être generer

1 année $\leq 2^{25}$ sec.

plus vieux que l'âge d'univers, $<$ # années jusqu'au fin (algorithme termine) $\geq 2^{50}$

Existence des solutions optimales

Théorème

PL

Un program linéaire $\underline{\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}}$ qui est admissible et borné a une solution optimale.

Démonstration: $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad u - v$, $\quad u \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$, $v \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$

PL $\simeq$

$$\boxed{\begin{aligned} &\max\ c^T(u-v) \\ &A(u-v) \leq b \\ &u, v \geq 0 \end{aligned}}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & -A \\ \hline -I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array}\right)$$

plein rang colonne.

admet sol. optimale

Un algorithme non efficace pour la programmation linéaire

- But: Résoudre un programme linéaire *borné*

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\, Ax \leqslant b\}.$$

- Transformer en un programme linéaire équivalent

$$\max\{c^T(x_1 - x_2) \colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\, A(x_1 - x_2) \leqslant b,\, x_1 \geqslant 0,\, x_2 \geqslant 0\}.$$

- Enumérer toutes les solutions basiques.
- Si toutes les solutions basiques ne sont pas admissibles, PL est inadmissible.
- Sinon, sélectionner la solution basique admissible avec la plus grande valeur d'objectif.