CM 5

La Méthode Du Simplexe (3)

Marcher encore sur les toits et le cas dégénéré

Cours *Optimisation Discrète* 24 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

La dernière fois :

Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter le pas iii) est correcte ? En d'autres termes, est-ce que

- $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit ? ✔
- le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ? ✔
- Si $J = \emptyset$, est-ce que le PL n'est pas admissible ? **?**

Affirmer l'inadmissibilité

Lemme

Si $J = \emptyset$, le PL est inadmissible.

Conséquence

La manière d'implémenter le pas iii) est correcte

En d'autres termes,

- $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit ! ✔
- le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ? ✔
- Si $J = \emptyset$, le PL n'est pas admissible ! ✔

Le cas dégénéré

Problème

Même si l'implémentation de l'algorithme du simplexe est correcte même si le PL est dégénéré, on ne peut pas garantir dans ce cas que l'algorithme termine.

Idée

Réduire le PL

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \tag{28}$$

à un autre PL

$$\max\{c_\epsilon^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \tag{29}$$

qui n'est pas dégénéré tel que un toit optimal de (29) est aussi un toit optimal de (28)

Notation

Définition

Soit $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$. On nomme A_B la matrice de lignes $a_i, i \in B$ et b_B le vecteur de composantes b_i.

Note

Avec cette notation, on considère un ordre fixe de l'ensemble B des indices. Soit $f_B : B \to\in \{1, \ldots, |B|\}$ l'application où $f_B(i)$ est la position de i avec cet ordre.

Exemple

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \{3, 2\}$$

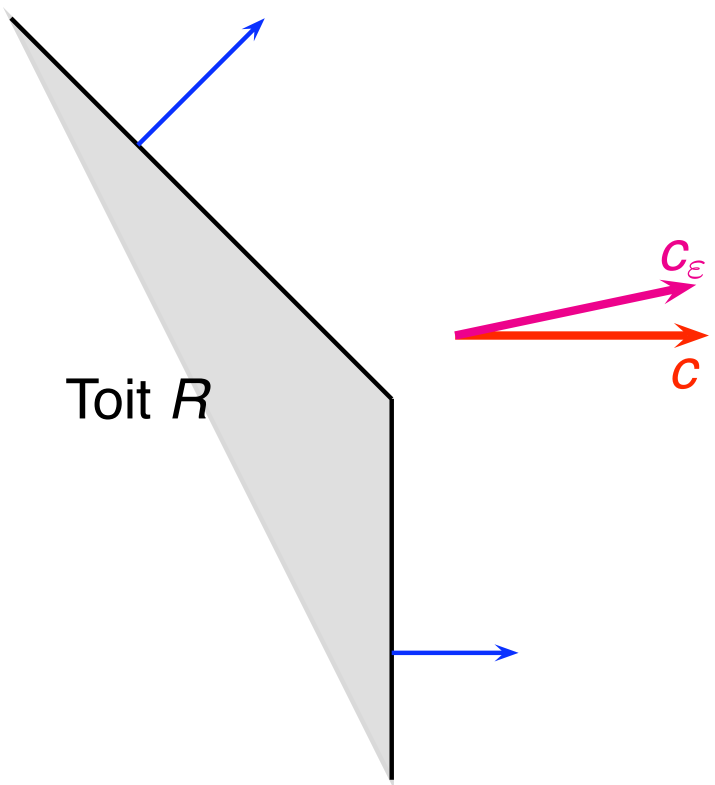
on trouve

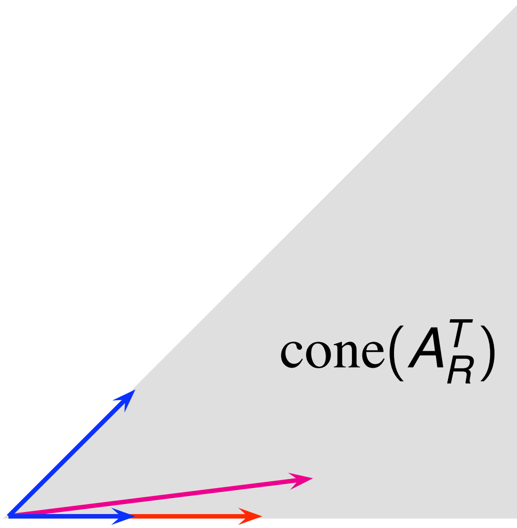
$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } f_B(3) = 1.$$

Perturber le c

Soit $R \subseteq \{1, \ldots, m\}$ un toit du PL (28). On perturbe c comme

$$c_\epsilon = c + {A_R}^T \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \varepsilon^n \end{pmatrix} \text{ tel que } \varepsilon > 0 \text{ est très petit.} \qquad (30)$$





Le cas dégénéré

Soit

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\} \tag{31}$$

un PL et R un toit du PL (31).

Lemme

Il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

1. *R est aussi un toit du PL*

$$\max\{c_\varepsilon^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}. \tag{32}$$

2. *Si $B \subseteq \{1, \ldots, m\}$ n'est pas un toit du PL*(31)*, alors B n'est pas non plus un toit du PL* (32)*.*
3. *Aucun toit de* (32) *n'est dégénéré.*

Règle de Pivotage Lexicographique

**Pseudo-code : Algorithme du Simplexe,
règle de pivotage lexicographique**

Input : $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $R \subseteq \{1,\dots,m\}$ toit initial
Output : Toit B optimal ou certificat que PL n'est pas admissible.

$B := R$
tant que $\exists i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $a_i x_B^* > b_i$
Calculer y^* solution de
$$\Sigma_{k\in B} a_k y_k = -a_i$$
Calculer $J = \{k \in B \colon y_k^* < 0\}$
si $J = \emptyset$ affirmer **PL inadmissible**
sinon
Choisir l'*unique* $j \in J$ tel que le vecteur
$\frac{(A_B^{-T}[c|A_R{}^T])_{f_B(j)}}{-y_j^*}$ est *lexicographiquement minimal*
$B := B \setminus \{j\} \cup \{i\}$

Résultats

Nous avons montré . . .

. . . qu'un programme linéaire $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}$ peut être résolu par l'algorithme du simplexe, étant donné un toit initial.

Puisque l'algorithme du simplexe trouve un toit optimal, nous pouvons aussi *certifier* l'optimalité d'une solution.

La prochaine fois, nous verrons comment obtenir le toit initial.