

Lecture 1

Exemples

Cours *Optimisation Discrète* 24 février 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Un exemple

$$\begin{aligned}
 \text{Fonction objectif : } & \max \quad x_1 + x_2 \\
 \text{Contraintes : } & \begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_2 - x_1 &\leq 1 \\ x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 10 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

En d'autres termes, nous cherchons $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ qui maximise l'objectif $x_1 + x_2$ et satisfait les inégalités

$$\begin{aligned}
 x_1 &\geq 0 \\
 x_2 &\geq 0 \\
 x_2 - x_1 &\leq 1 \\
 x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\
 4x_1 - x_2 &\leq 10
 \end{aligned}$$

1

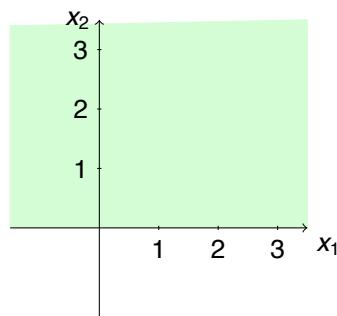
2

Notes

Notes

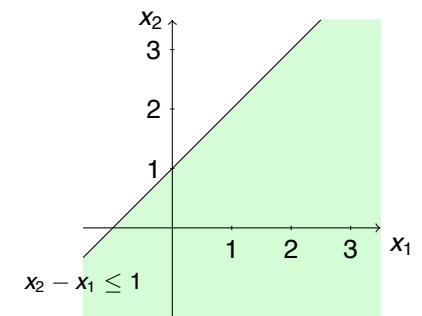
Solution graphique

Région admissible de la contrainte $x_1 \geq 0$



Solution graphique

Les solutions admissibles de la contrainte $x_2 - x_1 \leq 1$ sont les points au dessous de la droite $x_2 = 1 + x_1$



Notes

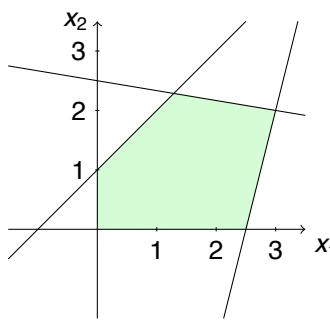
Notes

Solution graphique

L'ensemble des solutions admissibles par rapport aux contraintes

$$\begin{aligned}x_1 &\geq 0 \\x_2 &\geq 0 \\x_2 - x_1 &\leq 1 \\x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\4x_1 - x_2 &\leq 10\end{aligned}$$

est l'intersection des régions de contraintes individuelles.



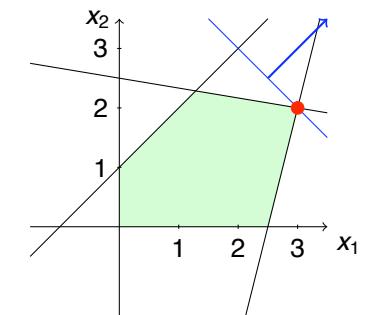
Solution graphique

La valeur de l'objectif pour (x_1, x_2) est β si et seulement si (x_1, x_2) se situe sur la droite $x_1 + x_2 = \beta$.

But : Trouver le plus grand β tel que la droite $x_1 + x_2 = \beta$ touche la région admissible.

La solution optimale est le point $(3, 2)$ à l'intersection des deux droites

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_2 &= 15 \\4x_1 - x_2 &= 10\end{aligned}$$



Notes

Notes

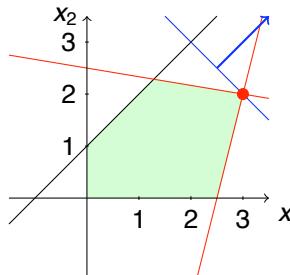
Démontrer l'optimalité

Comment peut-on démontrer rigoureusement que (3, 2) est optimal ?

(3, 2) satisfait toutes les contraintes, c'est un point *admissible*

Tous les points qui satisfont les deux contraintes

$$\begin{aligned}x_1 + 6x_2 &\leq 15 \\4x_1 - x_2 &\leq 10\end{aligned}$$



satisfont aussi la somme de ces deux contraintes :

$$5x_1 + 5x_2 \leq 25$$

Cette inégalité implique une *borne supérieure* de l'objectif $x_1 + x_2 \leq 5$ pour toutes les solutions admissibles.

(3, 2) satisfait cette borne supérieure avec *égalité*

Donc (3, 2) est une *solution optimale*.

5

Question

Peut-on toujours démontrer l'optimalité d'une solution admissible de manière similaire ?

Exercice de 5 minutes

Résoudre le programme linéaire

$$\begin{aligned}\max x_1 + x_2 \\2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\2x_1 + x_2 &\leq 5 \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

à l'aide d'un graphique et démontrer que la solution trouvée est optimale.

Refaire la même chose avec l'objectif $\max 3x_1 + 2.5x_2$.

Notes

Notes

6

Une diète saine et bon marché

Ingédients

- ▶ 100g de carottes contiennent : 3.5 mg de vitamine A, 6 mg de vitamine B, 50 kcal d'énergie
- ▶ 100g de chou blanc contiennent : 0.1 mg de vitamine A, 30 mg de vitamine B, 70 kcal d'énergie
- ▶ 100g de céréales contiennent : 0.02 mg de vitamine A, 0.04mg de vitamine B, 300 kcal d'énergie

Les prix pour 100g de nourriture

- ▶ CHF 1 carottes
- ▶ CHF 0.5 chou blanc
- ▶ CHF 3 céréales

Besoins journaliers

- ▶ vitamine A : 0.75 mg
- ▶ vitamine B : 0.5 mg
- ▶ énergie : 1500 kcal

Une diète saine et bon marché : Un programme linéaire

On introduit les variables x_1 , x_2 et x_3 , représentant le nombre d'unités de carottes, de chou blanc et de céréales, où une unité correspond à 100g.

Minimiser le coût d'un plat journalier :

$$\min \quad 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3.$$

La contrainte d'au moins 0.75 mg de vitamine A s'écrit comme

$$3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75.$$

Les variables x_1 , x_2 et x_3 doivent être non-négatives.

Notes

Notes

Une diète saine et bon marché : Un programme linéaire

Le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \text{min} & 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ \text{sous contraintes} & \begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 &\geq 0.75 \\ 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 &\geq 0.5 \\ 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 &\geq 1500. \end{aligned} \end{array}$$

Définition d'un programme linéaire

Définition : Programme linéaire (PL)

Dans un programme linéaire, on cherche un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui maximise une *fonction objectif linéaire*

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

parmi tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont m contraintes linéaires données

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Notation matricielle

$$\max_{Ax \leq b} c^T x$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $A(i, j) = a_{ij}$, $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

Notes

Notes

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll}
 \min & 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\
 \text{sous contraintes} & \begin{array}{l}
 x_1 \geq 0 \\
 x_2 \geq 0 \\
 x_3 \geq 0 \\
 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\
 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\
 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500.
 \end{array}
 \end{array}$$

On peut réécrire

- ▶ $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- ▶ $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- ▶ $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- ▶ $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- ▶ $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\
 \text{sous contraintes} & \begin{array}{l}
 x_1 \geq 0 \\
 x_2 \geq 0 \\
 x_3 \geq 0 \\
 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\
 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\
 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500.
 \end{array}
 \end{array}$$

On peut réécrire

- ▶ $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- ▶ $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- ▶ $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- ▶ $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- ▶ $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

Notes

Notes

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\
 \text{sous contraintes} & \begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 &\geq 0.75 \\ 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 &\geq 0.5 \\ 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 &\geq 1500. \end{aligned}
 \end{array}$$

On peut réécrire

- ▶ $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- ▶ $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- ▶ $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- ▶ $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- ▶ $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\
 \text{sous contraintes} & \begin{aligned} -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \\ -x_3 &\leq 0 \\ -3.5x_1 - 0.1x_2 - 0.02x_3 &\leq -0.75 \\ -6x_1 - 30x_2 - 0.04x_3 &\leq -0.5 \\ -50x_1 - 70x_2 - 300x_3 &\leq -1500. \end{aligned}
 \end{array}$$

On peut réécrire

- ▶ $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- ▶ $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- ▶ $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- ▶ $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- ▶ $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

Notes

Notes

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll}
 \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\
 \text{sous contraintes} & \begin{array}{l}
 -x_1 \leq 0 \\
 -x_2 \leq 0 \\
 -x_3 \leq 0 \\
 -3.5x_1 - 0.1x_2 - 0.02x_3 \leq -0.75 \\
 -6x_1 - 30x_2 - 0.04x_3 \leq -0.5 \\
 -50x_1 - 70x_2 - 300x_3 \leq -1500.
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 \max c^T x \\
 Ax \leq b
 \end{array}$$

avec $c = (-1, -0.5, -3)^T$, $b = (0, 0, 0, -0.75, -0.5, -1500)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3.5 & -0.1 & -0.02 \\ -6 & -30 & -0.04 \\ -50 & -70 & -300 \end{pmatrix}$$

12

Forme standard avec inégalités

La forme syntaxique

$$\begin{array}{l}
 \max c^T x \\
 Ax \leq b
 \end{array}$$

pour les programmes linéaires est dénommée *forme standard avec inégalités*.

Exercice de 5 minutes

Réécrire le programme linéaire suivant sous la forme standard avec inégalités

$$\begin{array}{ll}
 \min & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\
 & x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\
 & x_2 + x_3 \geq 6 \\
 & x_1 \geq 0
 \end{array}$$

13

Notes

Notes

Admissible, borné, solution optimale

- ▶ $x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé *admissible*, si x^* satisfait toutes les contraintes (inégalités).
Si des solutions admissibles existent pour un programme linéaire alors le programme lui-même est appelé *admissible*.
- ▶ Un programme linéaire est *borné* s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui est admissible, on a $c^T x^* \leq M$.
- ▶ Une solution admissible x^* est une *solution optimale* si $c^T x^* \geq c^T y^*$ pour tout y^* admissible.

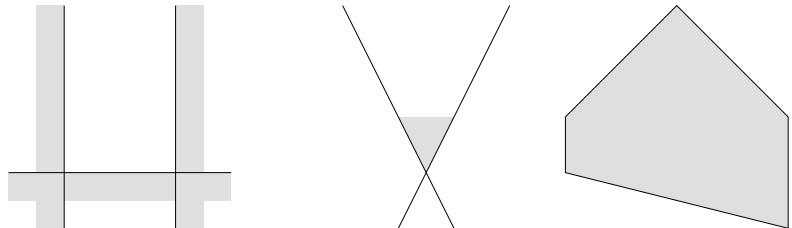


FIGURE: Ayant comme objectif de trouver le point le plus haut, nous avons de gauche à droite un programme linéaire inadmissible, un programme linéaire non-borné et un programme linéaire borné.

Ajuster une droite

Un problème bien connu en statistique :

On observe des points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 1, \dots, n$ et on s'intéresse à trouver une fonction linéaire $y = a \cdot x + b$ qui reflète l'échantillon

Une manière de faire ceci est de minimiser :

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2, \quad (1)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont les paramètres de la droite qui est cherchée.

$(ax_i + b - y_i)^2$: Carré de la distance verticale du point (x_i, y_i) à la droite
 $y = ax + b$

Au lieu d'utiliser la méthode des moindres carrés on pourrait aussi minimiser la fonction suivante un peu plus robuste face à des valeurs déviantes :

$$\sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i|. \quad (2)$$

L'astuce :

Introduire une variable de plus qui modélise la valeur absolue de $ax_i + b - y_i$.

Le programme linéaire

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^n h_i \\ h_i & \geq ax_i + b - y_i, \quad i = 1, \dots, n \\ h_i & \geq -(ax_i + b - y_i), \quad i = 1, \dots, n \end{array} \quad (3)$$

Les variables sont h_i , $i = 1, \dots, n$, a et b . Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, les h_i optimaux seront $h_i = |ax_i + b - y_i|$ vu que la fonction objectif minimise la somme des h_i . Si un des h_i était strictement plus grand que $|ax_i + b - y_i|$ alors la fonction objectif pourrait être améliorée en diminuant ce h_i .

Notes

Notes

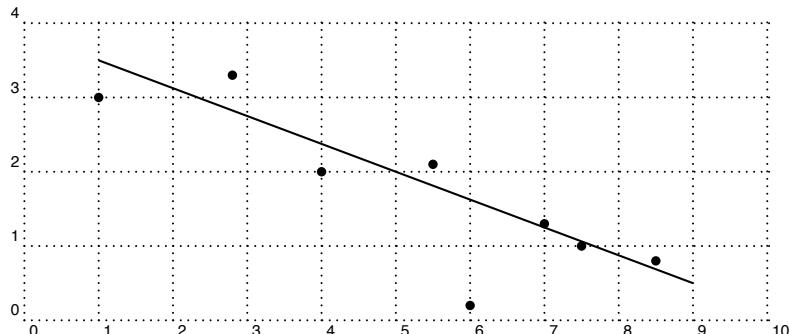
Un exemple

But

Trouver une droite ajustée, comme décrit auparavant, pour les points

$(1, 3), (2.8, 3.3), (4, 2), (5.5, 2.1), (6, 0.2), (7, 1.3), (7.5, 1), (8.5, 0.8)$.

Une droite ajustée optimale qui respecte la mesure de distance (2) est la droite $y = -0.293333 \cdot x + 3.293333$.



18

Boule maximale dans un polyèdre

Définition (Polyèdre)

Un *polyèdre* est un ensemble de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

L'ensemble des solutions admissibles d'un programme linéaire est un polyèdre.

Définition (Boule)

Une *boule* est un ensemble de la forme

$$B_{R,y} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq R\}.$$

Le point y est son *centre* et R est son *rayon*.

$B_{R,y}$ est l'ensemble des points qui sont à distance R de y .

19

Notes

Notes

L'objectif

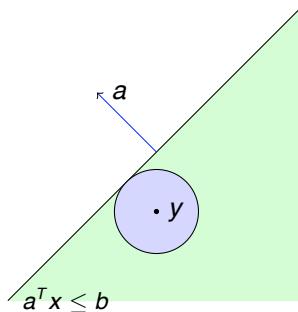
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, trouver une boule du plus grand rayon qui est entièrement incluse dans le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$.

Définition (Hyperplan et demi-espace)

Un *demi-espace* est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}$ où $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Un *hyperplan* est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b\}$ où $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- ▶ La *distance* de $y \in \mathbb{R}^n$ à l'hyperplan $a^T x = b$ est $(b - a^T y) / \|a\|$ (on suppose $a \neq 0$)
- ▶ Si y appartient à $a^T x \leq b$, la boule maximale autour de y qui est incluse dans $a^T x \leq b$ est de rayon $(b - a^T y) / \|a\|$.



20

Problème de reformulation

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

- ▶ x est admissible, c'est-à-dire $x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$
- ▶ La *distance minimale* de x par rapport à tous les hyperplans $a_i^T x = b_i$, $i = 1, \dots, m$ est *maximisée*.

Les variables sont :

- ▶ $x \in \mathbb{R}^n$: le centre de la boule
- ▶ $D \in \mathbb{R}$: la distance minimale de x aux hyperplans $a_i^T x = b_i$

$$\max D$$
$$D \leq (b_i - a_i^T x) / \|a_i\|, i = 1, \dots, m$$

Exercice de 5 minutes

Réécrire le modèle ci-dessus sous la forme standard avec inégalités, c'est-à-dire décrire la matrice A , le vecteur b et l'objectif c .

Notes

Notes

21