CM 1

Programmation linéaire

Exemple

Cours *Optimisation Discrète* 24 février 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Programmation linéaire

Un exemple

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & x_1 + x_2 & & \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \geq & 0 \\
 & x_2 - x_1 & \leq & 1 \\
 & x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\
 & 4x_1 - x_2 & \leq & 10
\end{array}
$$

Programmation linéaire

Un exemple

$$
\begin{array}{llrcl}
\textit{Fonction objectif :} & \max & x_1 + x_2 & & \\
\textit{Contraintes :} & & x_1 & \geq & 0 \\
 & & x_2 & \geq & 0 \\
 & & x_2 - x_1 & \leq & 1 \\
 & & x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\
 & & 4x_1 - x_2 & \leq & 10
\end{array}
$$

Programmation linéaire

Un exemple

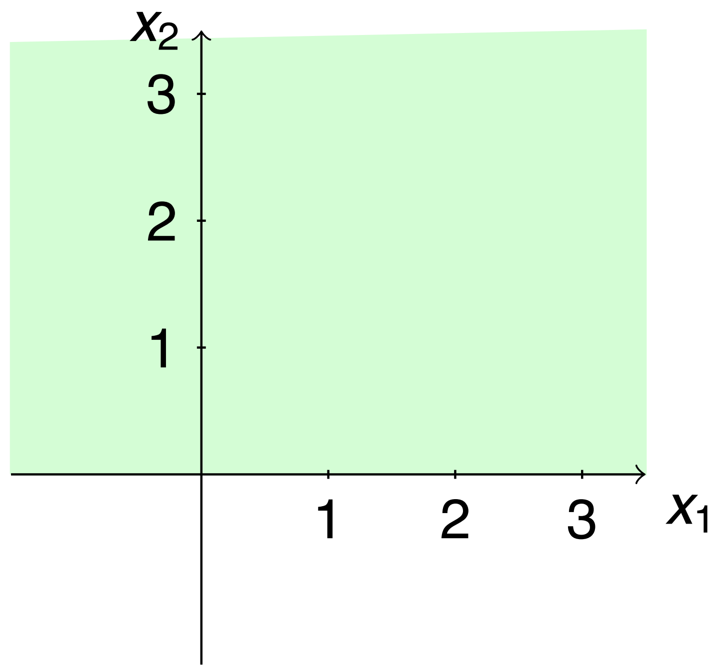
$$
\begin{array}{lll}
\textit{Fonction objectif :} & \max & x_1 + x_2 \\
\textit{Contraintes :} & & \begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_2 - x_1 & \leq & 1 \\ x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 - x_2 & \leq & 10 \end{array}
\end{array}
$$

En d'autres termes, nous cherchons $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ qui maximise *l'objectif* $x_1 + x_2$ et satisfait les inégalités

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 & \geq & 0 \\
x_2 & \geq & 0 \\
x_2 - x_1 & \leq & 1 \\
x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 - x_2 & \leq & 10
\end{array}
$$

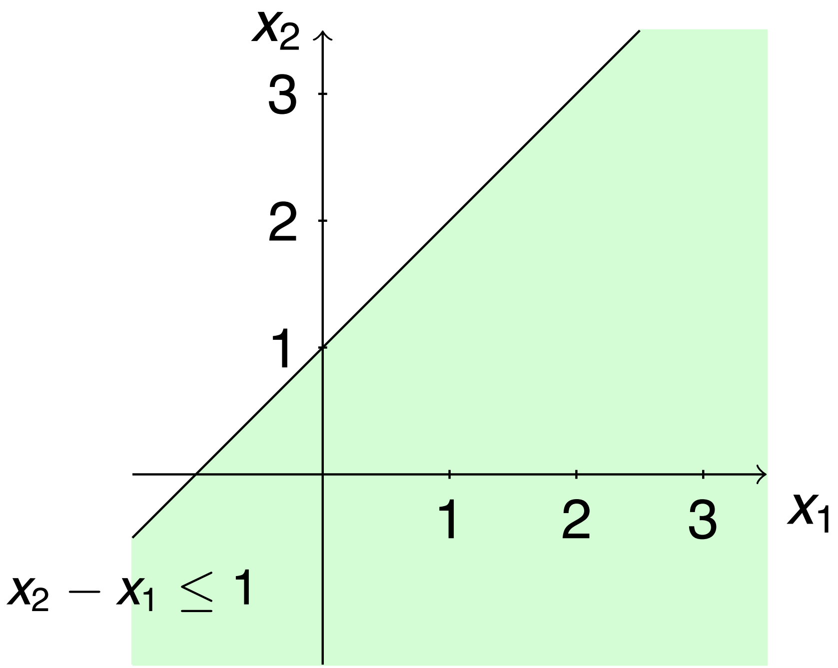
Solution graphique

Région admissible de la contrainte $x_1 \geq 0$



Solution graphique

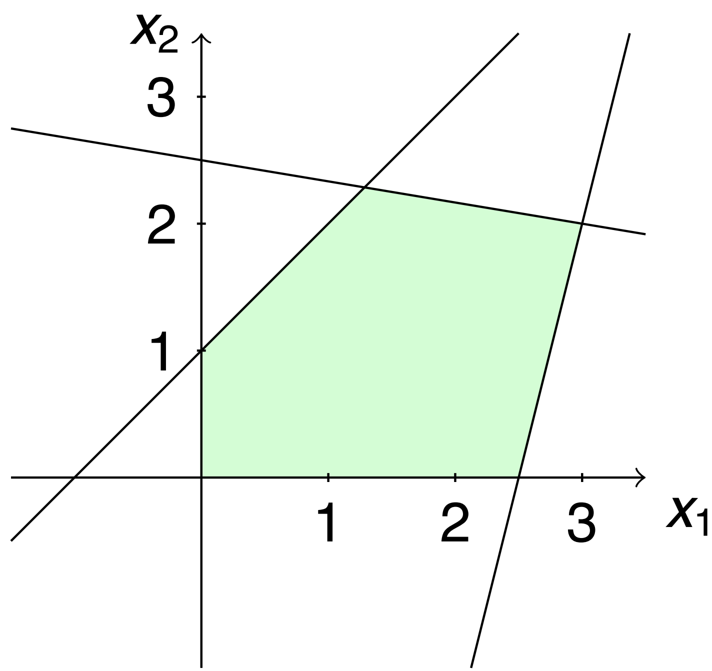
Les solutions admissibles de la contrainte $x_2 - x_1 \leq 1$ sont les points au dessous de la droite $x_2 = 1 + x_1$



Solution graphique

L'ensemble des solutions admissibles par rapport aux contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \geq & 0 \\ x_2 & \geq & 0 \\ x_2 - x_1 & \leq & 1 \\ x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 - x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

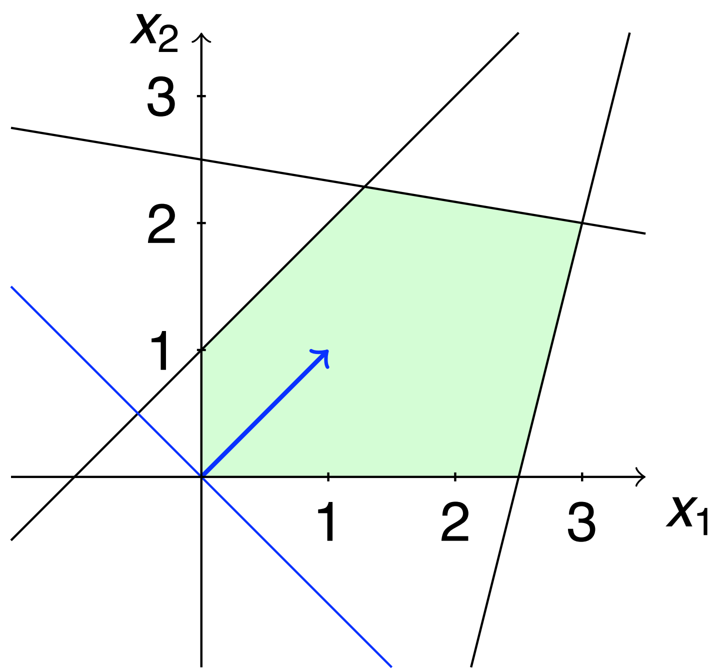


est l'intersection des régions de contraintes individuelles.

Solution graphique

La valeur de l'objectif pour (x_1, x_2) est β si et seulement si (x_1, x_2) se situe sur la droite $x_1 + x_2 = \beta$.
But : Trouver le plus grand β tel que la droite $x_1 + x_2 = \beta$ touche la région admissible.
La solution optimale est le point $(3, 2)$ à l'intersection des deux droites

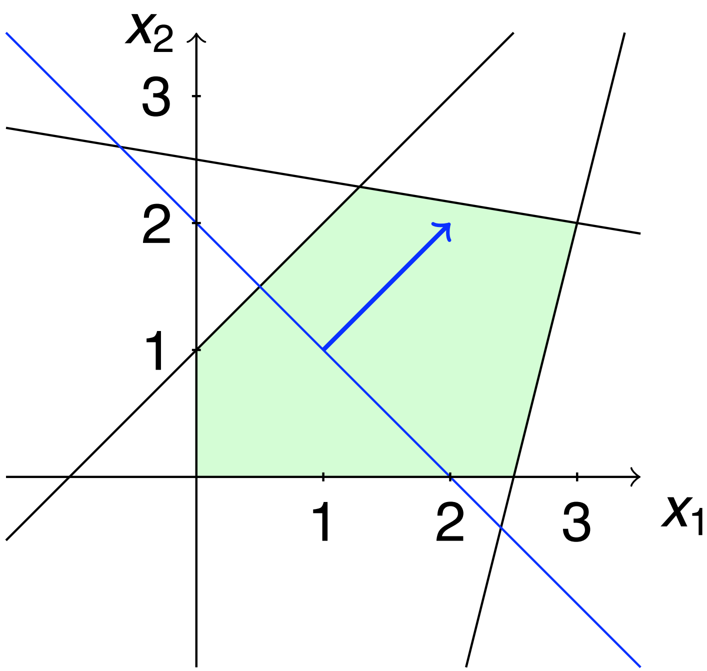
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 15 \\ 4x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$$



Solution graphique

La valeur de l'objectif pour (x_1, x_2) est β si et seulement si (x_1, x_2) se situe sur la droite $x_1 + x_2 = \beta$.
But : Trouver le plus grand β tel que la droite $x_1 + x_2 = \beta$ touche la région admissible.
La solution optimale est le point $(3, 2)$ à l'intersection des deux droites

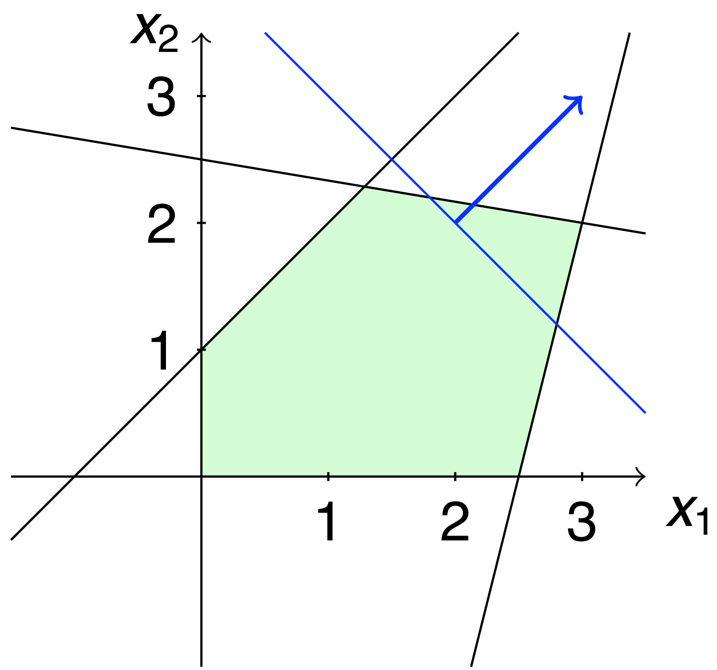
$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 15 \\ 4x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$$



Solution graphique

La valeur de l'objectif pour (x_1, x_2) est β si et seulement si (x_1, x_2) se situe sur la droite $x_1 + x_2 = \beta$.
But : Trouver le plus grand β tel que la droite $x_1 + x_2 = \beta$ touche la région admissible.
La solution optimale est le point $(3, 2)$ à l'intersection des deux droites

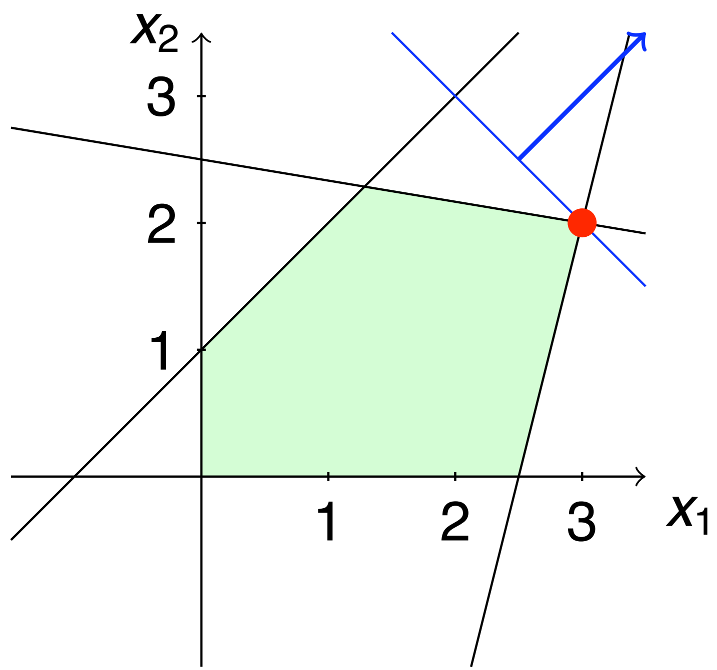
$$
\begin{aligned}
x_1 + 6x_2 &= 15 \\
4x_1 - x_2 &= 10
\end{aligned}
$$



Solution graphique

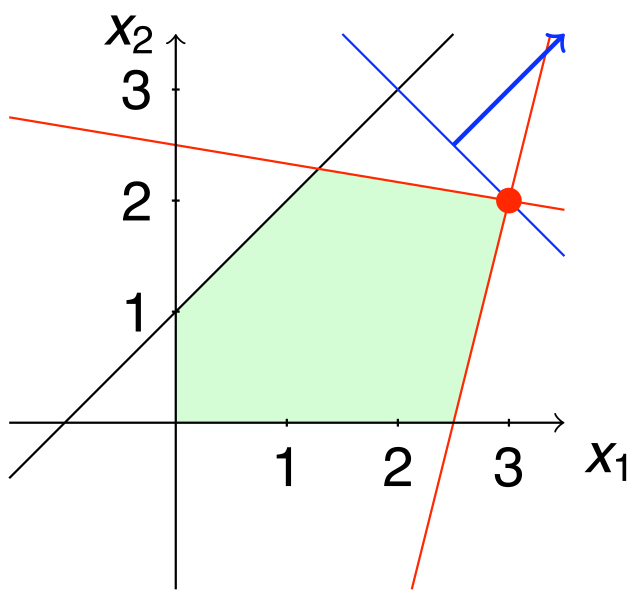
La valeur de l'objectif pour (x_1, x_2) est β si et seulement si (x_1, x_2) se situe sur la droite $x_1 + x_2 = \beta$.
But : Trouver le plus grand β tel que la droite $x_1 + x_2 = \beta$ touche la région admissible.
La solution optimale est le point $(3, 2)$ à l'intersection des deux droites

$$
\begin{aligned}
x_1 + 6x_2 &= 15 \\
4x_1 - x_2 &= 10
\end{aligned}
$$



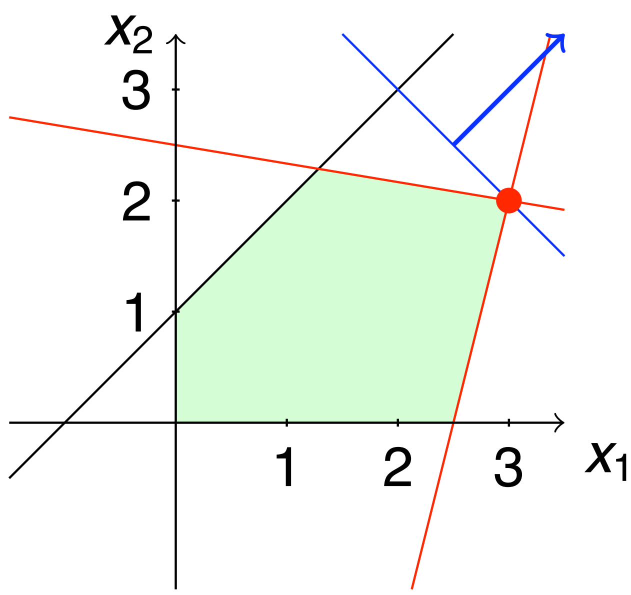
Démontrer l'optimalité

Comment peut-on démontrer rigoureusement que $(3, 2)$ est optimal ?



Démontrer l'optimalité

Comment peut-on démontrer rigoureusement que $(3, 2)$ est optimal ?



$(3, 2)$ satisfait toutes les contraintes, c'est un point *admissible*

Tous les points qui satisfont les deux contraintes

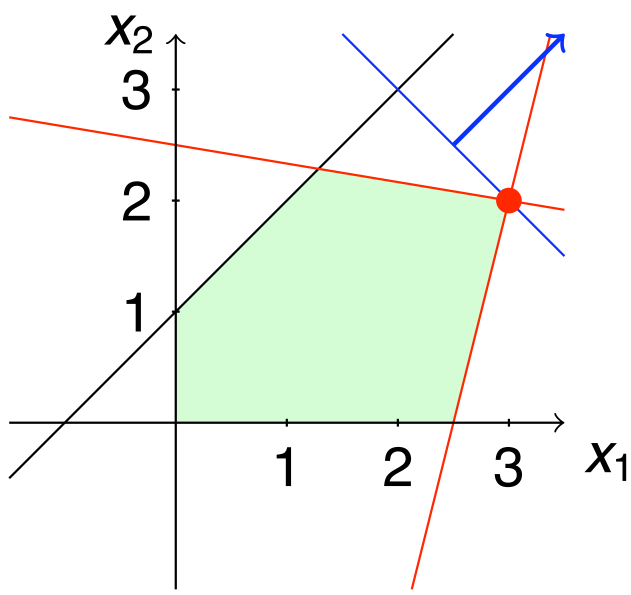
$$\begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 - x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

satisfont aussi la somme de ces deux contraintes :

$$5x_1 + 5x_2 \quad \leq \quad 25$$

Démontrer l'optimalité

Comment peut-on démontrer rigoureusement que $(3, 2)$ est optimal ?



$(3, 2)$ satisfait toutes les contraintes, c'est un point *admissible*

Tous les points qui satisfont les deux contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 - x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

satisfont aussi la somme de ces deux contraintes :

$$5x_1 + 5x_2 \quad \leq \quad 25$$

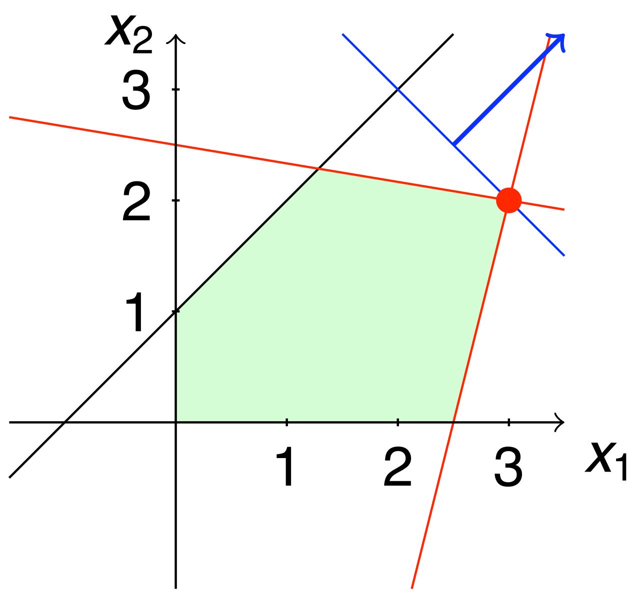
Cette inégalité implique une *borne supérieure* de l'objectif $x_1 + x_2 \leq 5$ pour toutes les solutions admissibles.

$(3, 2)$ satisfait cette borne supérieure avec *égalité*

Donc $(3, 2)$ est une *solution optimale*.

Démontrer l'optimalité

Comment peut-on démontrer rigoureusement que $(3, 2)$ est optimal ?



$(3, 2)$ satisfait toutes les contraintes, c'est un point *admissible*

Tous les points qui satisfont les deux contraintes

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 - x_2 & \leq & 10 \end{array}$$

satisfont aussi la somme de ces deux contraintes :

$$5x_1 + 5x_2 \quad \leq \quad 25$$

Cette inégalité implique une *borne supérieure* de l'objectif $x_1 + x_2 \leq 5$ pour toutes les solutions admissibles.

$(3, 2)$ satisfait cette borne supérieure avec *égalité*

Donc $(3, 2)$ est une *solution optimale*.

Question

Peut-on toujours démontrer l'optimalité d'une solution admissible de manière similaire ?

Exercice de 5 minutes

Résoudre le programme linéaire

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&2x_1 + 3x_2 \quad \leq \quad 9 \\
&2x_1 + x_2 \quad \leq \quad 5 \\
&x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

à l'aide d'un graphique et démontrer que la solution trouvée est optimale.

Refaire la même chose avec l'objectif $\max 3\,x_1 + 2.5\,x_2$.

Une diète saine et bon marché

But

Acheter de la nourriture à prix minimal afin que les besoins journaliers de certaines vitamines et d'énergie soient satisfaits. Il y a trois types de nourriture.

- carottes
- chou blanc
- céréales

Une diète saine et bon marché

Ingrédients

- 100g de carottes contiennent : 3.5 mg de vitamine A, 6 mg de vitamine B, 50 kcal d’énergie
- 100g de chou blanc contiennent : 0.1 mg de vitamine A, 30 mg de vitamine B, 70 kcal d’énergie
- 100g de céréales contiennent : 0.02 mg de vitamine A, 0.04mg de vitamine B, 300 kcal d’énergie

Les prix pour 100g de nourriture

- CHF 1 carottes
- CHF 0.5 chou blanc
- CHF 3 céréales

Besoins journaliers

- vitamine A : 0.75 mg
- vitamine B : 0.5 mg
- énergie : 1500 kcal

Une diète saine et bon marché : Un programme linéaire

On introduit les variables x_1, x_2 et x_3, représentant le nombre d'unités de carottes, de chou blanc et de céréales, où une unité correspond à 100g.
Minimiser le coût d'un plat journalier :

$$\min \quad 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3.$$

La contrainte d'au moins 0.75 mg de vitamine A s'écrit comme

$$3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75.$$

Les variables x_1, x_2 et x_3 doivent être non-négatives.

Une diète saine et bon marché : Un programme linéaire

Le programme linéaire

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\
\text{sous contraintes} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0 \\
& 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\
& 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\
& 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500.
\end{array}
$$

Définition d'un programme linéaire

Définition : Programme linéaire (PL)

Dans un programme linéaire, on cherche un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui maximise une *fonction objectif linéaire*

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

parmi tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont m contraintes linéaires données

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Définition d'un programme linéaire

Définition : Programme linéaire (PL)

Dans un programme linéaire, on cherche un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui maximise une *fonction objectif linéaire*

$$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

parmi tous les vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfont m contraintes linéaires données

$$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Notation matricielle

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $A(i,j) = a_{ij}$, $c = (c_1, \ldots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$.

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$
\begin{array}{ll}
\text{min} & 1 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\
\text{sous contraintes} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \geq 0 \\
& 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\
& 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\
& 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500.
\end{array}
$$

On peut réécrire

- min $c^T x$ comme max $-c^T x$
- $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll} \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\ \text{sous contraintes} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_3 \geq 0 \\ & 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\ & 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\ & 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500. \end{array}$$

On peut réécrire

- $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll} \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\ \text{sous contraintes} & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \\ & 3.5x_1 + 0.1x_2 + 0.02x_3 \geq 0.75 \\ & 6x_1 + 30x_2 + 0.04x_3 \geq 0.5 \\ & 50x_1 + 70x_2 + 300x_3 \geq 1500. \end{array}$$

On peut réécrire

- min $c^T x$ comme max $-c^T x$
- $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll} \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\ \text{sous contraintes} & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \\ & -3.5x_1 - 0.1x_2 - 0.02x_3 \leq -0.75 \\ & -6x_1 - 30x_2 - 0.04x_3 \leq -0.5 \\ & -50x_1 - 70x_2 - 300x_3 \leq -1500. \end{array}$$

On peut réécrire

- $\min c^T x$ comme $\max -c^T x$
- $a^T x \geq b$ comme $-a^T x \leq -b$
- $a^T x = b$ comme $a^T x \leq b \wedge -a^T x \leq -b$
- $x_i \geq 0$ comme $-e_i^T x \leq 0$, où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur unitaire
- $x_i \leq 0$ comme $e_i^T x \leq 0$

L'exemple du programme linéaire précédent n'est pas sous cette forme :

$$\begin{array}{ll} \max & -1 \cdot x_1 - 0.5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \\ \text{sous contraintes} & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \\ & -x_3 \leq 0 \\ & -3.5x_1 - 0.1x_2 - 0.02x_3 \leq -0.75 \\ & -6x_1 - 30x_2 - 0.04x_3 \leq -0.5 \\ & -50x_1 - 70x_2 - 300x_3 \leq -1500. \end{array}$$

$$\max c^T x$$
$$Ax \leq b$$

avec $c = (-1, -0.5, -3)^T$, $b = (0, 0, 0, -0.75, -0.5, -1500)^T$ et

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3.5 & -0.1 & -0.02 \\ -6 & -30 & -0.04 \\ -50 & -70 & -300 \end{pmatrix}$$

Forme standard avec inégalités

La forme syntaxique

$$\max c^T x$$
$$Ax \leq b$$

pour les programmes linéaires est dénommée *forme standard avec inégalités* .

Forme standard avec inégalités

La forme syntaxique

$$\begin{array}{c} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{array}$$

pour les programmes linéaires est dénommée *forme standard avec inégalités* .

Exercice de 5 minutes

Réécrire le programme linéaire suivant sous la forme standard avec inégalités

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5 \\ & x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}$$

Admissible, borné, solution optimale

- $x^* \in \mathbb{R}^n$ est appelé *admissible*, si x^* satisfait toutes les contraintes (inégalités).
  Si des solutions admissibles existent pour un programme linéaire alors le programme lui-même est appelé *admissible*.
- Un programme linéaire est *borné* s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x^* \in \mathbb{R}^n$ qui est admissible, on a $c^T x^* \leq M$.
- Une solution admissible x^* est une *solution optimale* si $c^T x^* \geq c^T y^*$ pour tout y^* admissible.

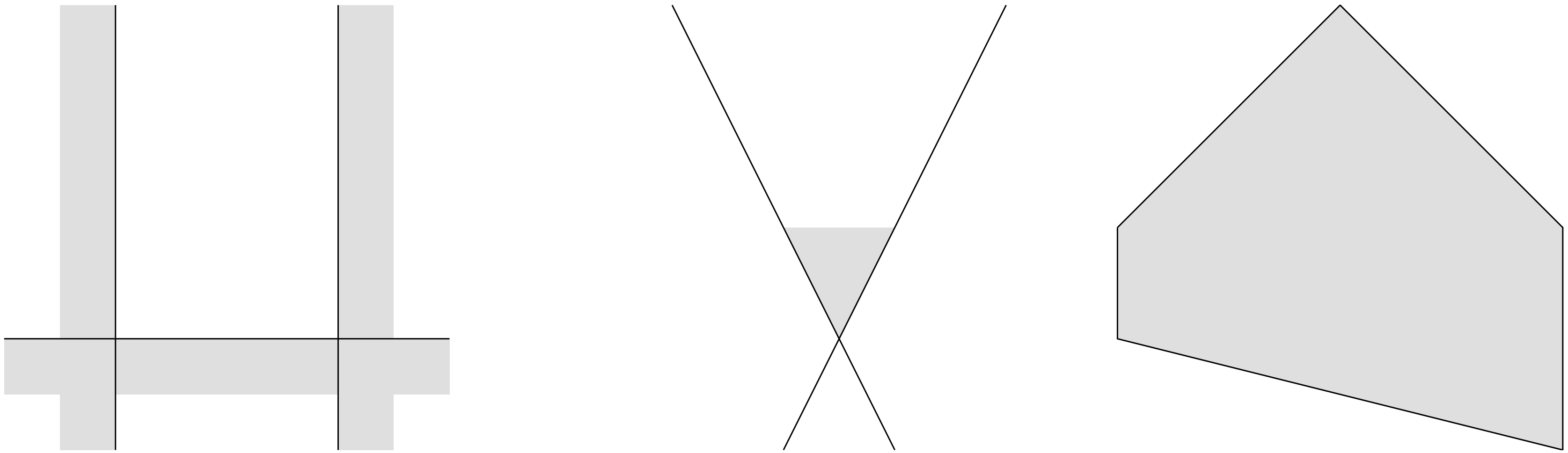


FIGURE: Ayant comme objectif de trouver le point le plus haut, nous avons de gauche à droite un programme linéaire inadmissible, un programme linéaire non-borné et un programme linéaire borné.

Ajuster une droite

Un problème bien connu en statistique :

On observe des points $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2 \quad i = 1, \ldots, n$ et on s'intéresse à trouver une fonction linéaire $y = a \cdot x + b$ qui reflète l'échantillon

Une manière de faire ceci est de minimiser :

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2, \tag{1}$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont les paramètres de la droite qui est cherchée.

$(ax_i + b - y_i)^2$: Carré de la distance verticale du point (x_i, y_i) à la droite $y = a\,x + b$

Au lieu d'utiliser la méthode des moindres carrés on pourrait aussi minimiser la fonction suivante un peu plus robuste face à des valeurs déviantes :

$$\sum_{i=1}^{n} |ax_i + b - y_i|. \tag{2}$$

L'astuce :

Introduire une variable de plus qui modélise la valeur absolue de $ax_i + b - y_i$.

Le programme linéaire

$$\begin{aligned}
&\min \textstyle\sum_{i=1}^{n} h_i \\
&h_i \quad \geq \quad ax_i + b - y_i, \ i = 1, \ldots, n \\
&h_i \quad \geq \quad -(ax_i + b - y_i), \ i = 1, \ldots, n
\end{aligned} \tag{3}$$

Les variables sont h_i, $i = 1, \ldots, n$, a et b. Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ fixés, les h_i optimaux seront $h_i = |ax_i + b - y_i|$ vu que la fonction objectif minimise la somme des h_i. Si un des h_i était strictement plus grand que $|ax_i + b - y_i|$ alors la fonction objectif pourrait être améliorée en diminuant ce h_i.

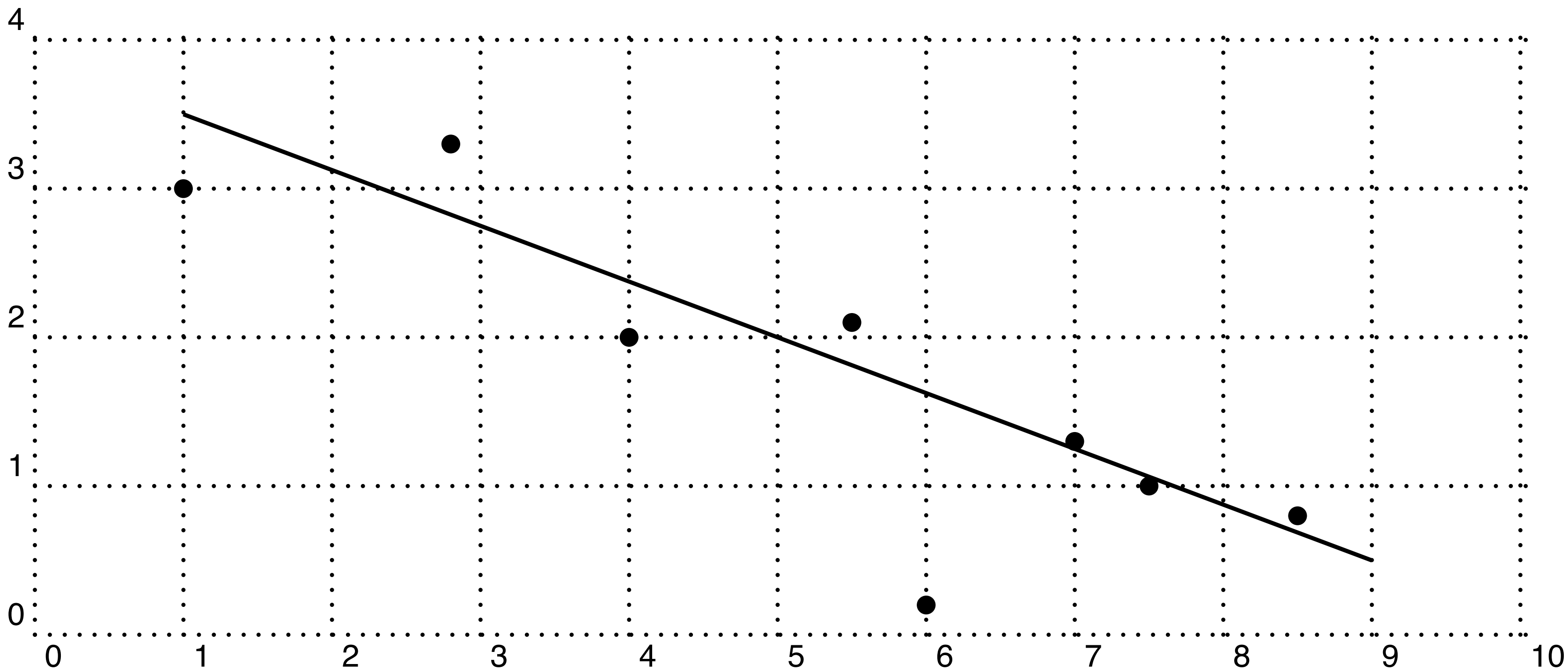
Un exemple

But

Trouver une droite ajustée, comme décrit auparavant, pour les points

$$(1, 3), (2.8, 3.3), (4, 2), (5.5, 2.1), (6, 0.2), (7, 1.3), (7.5, 1), (8.5, 0.8).$$

Une droite ajustée optimale qui respecte la mesure de distance (2) est la droite $y = -0.293333 \cdot x + 3.293333$.



Boule maximale dans un polyèdre

Définition (Polyèdre)

Un *polyèdre* est un ensemble de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\},$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

L'ensemble des solutions admissibles d'un programme linéaire est un polyèdre.

Définition (Boule)

Une *boule* est un ensemble de la forme

$$B_{R,y} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - y\| \leq R\}.$$

Le point y est son *centre* et R est son *rayon*.

$B_{R,y}$ est l'ensemble des points qui sont à distance R de y.

L'objectif

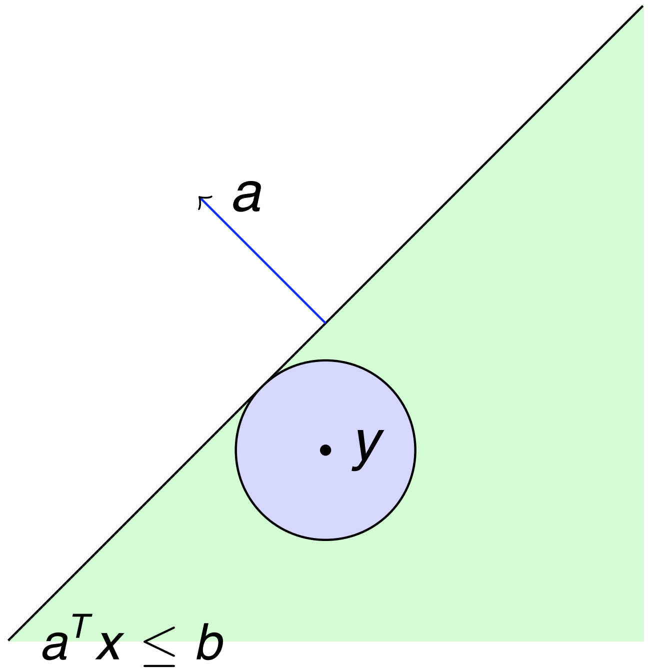
$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, trouver une boule du plus grand rayon qui est entièrement incluse dans le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$.

Définition (Hyperplan et demi-espace)

Un *demi-espace* est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x \leq b\}$ où $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Un *hyperplan* est un ensemble de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n \colon a^T x = b\}$ où $a \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- La *distance* de $y \in \mathbb{R}^n$ à l'hyperplan $a^T x = b$ est $(b - a^T y)/\|a\|$ (on suppose $a \neq \mathbf{0}$)
- Si y appartient à $a^T x \leq b$, la boule maximale autour de y qui est incluse dans $a^T x \leq b$ est de rayon $(b - a^T y)/\|a\|$.



Problème de reformulation

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

- x est admissible, c'est-à-dire $x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$
- La *distance minimale* de x par rapport à tous les hyperplans $a_i^T x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$ est *maximisée*.

Les variables sont :

- $x \in \mathbb{R}^n$: le centre de la boule
- $D \in \mathbb{R}$: la distance minimale de x aux hyperplans $a_i^T x = b_i$

T

$$\max D$$
$$D \leq (b_i - a_i^T x)/\|a_i\|, \ i = 1, \ldots, m$$

Problème de reformulation

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ donnés, trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

- x est admissible, c'est-à-dire $x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$
- La *distance minimale* de x par rapport à tous les hyperplans $a_i^T x = b_i$, $i = 1, \ldots, m$ est *maximisée*.

Les variables sont :

- $x \in \mathbb{R}^n$: le centre de la boule
- $D \in \mathbb{R}$: la distance minimale de x aux hyperplans $a_i^T x = b_i$

T

$$\max D$$
$$D \leq (b_i - a_i^T x)/\|a_i\|, \; i = 1, \ldots, m$$

Exercice de 5 minutes

Réécrire le modèle ci-dessus sous la forme standard avec inégalités , c'est-à-dire décrire la matrice A, le vecteur b et l'objectif c.