Lecture 9

Algorithmes

Le Bon, la Brute et le Truand

Cours Optimisation Discrète 21 avril 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Notation grand O

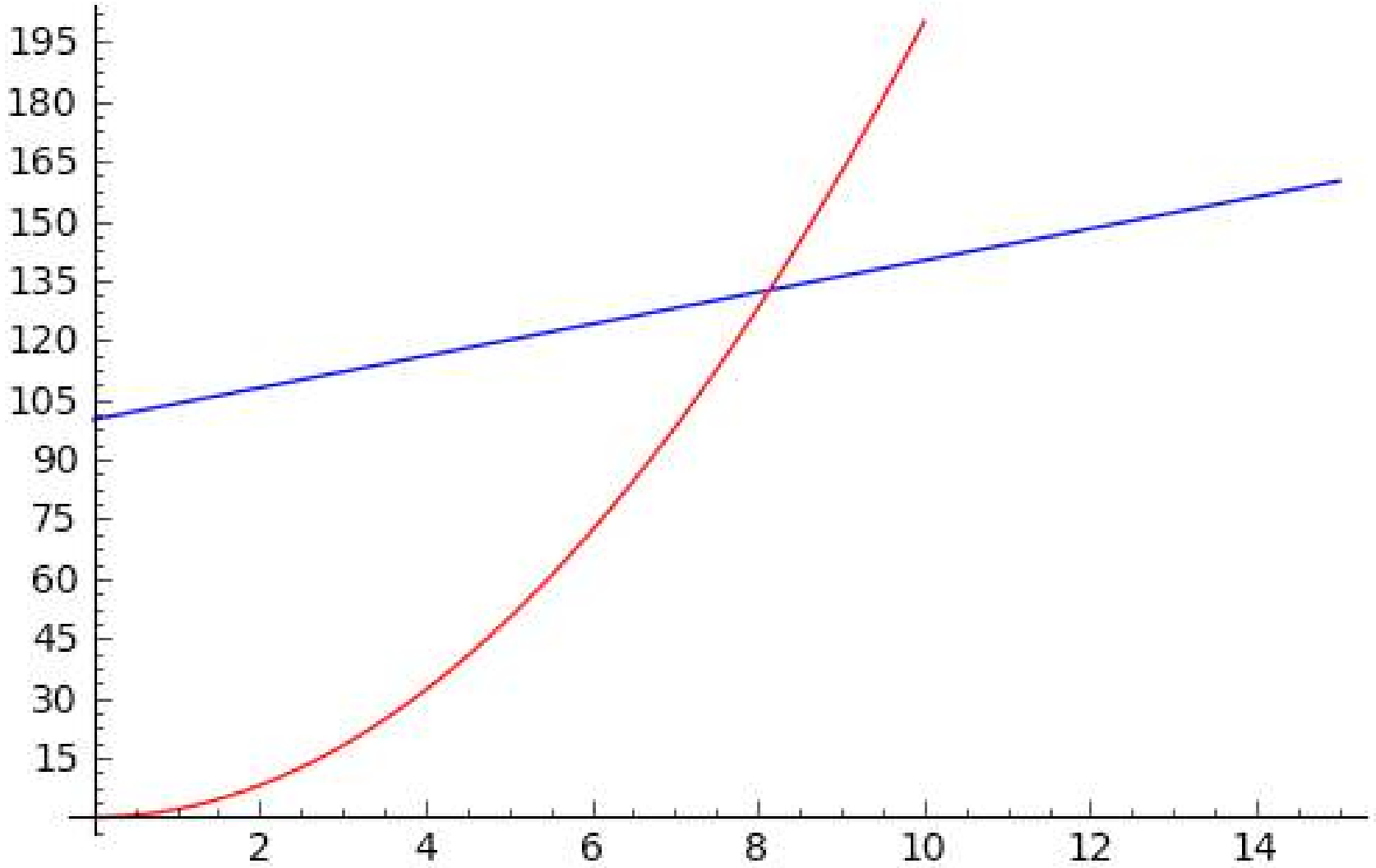
Motivation

Les algorithmes nécessitent un certain nombre d'opérations de base et donc de temps. Plus l'entrée est grande, plus il faut d'opérations. Comment évaluer la qualité d'un algorithme ?

Exemple

- Un algorithme A effectue $4 \cdot n + 100$ opérations de base sur une entrée de longueur n.
- Un algorithme B effectue $2 \cdot n^2$ opérations de base sur une entrée de longueur n.
- L'algorithme B est plus rapide pour les petites entrées.
- L'algorithme A est plus rapide dès que la longueur de l'entrée dépasse 9.

Graphe des deux fonctions



Notation grand O

Définition

Soient $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ des fonctions. On écrit $f = O(g)$ s'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ et un nombre $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

On écrit $f = \Omega(g)$ if $g = O(f)$.

Exemple

- $5n^3 + n + 7 = O(n^3)$
- $\sin(n) = O(1)$
- $n^k = O(2^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Analyse des algorithmes de tri

Trier une liste de nombres

Entrée : n entiers naturels $a_1, \ldots, a_n$
But : Réordonner les nombres (c'est-à-dire trouver une permutation $\pi \in S_n$) de telle façon que $a_{\pi(1)} \leq \cdots \leq a_{\pi(n)}$.

Modèle de calcul

Nous supposons que les opérations de base incluent la comparaison de deux nombres (opération en temps constant).

La brute

Tri à bulles

```
def bubble(List,i):
    k = i
    while k>=1 and List[k]<List[k-1] :
        List[k-1:k+1] = reversed(List[k-1:k+1])
        k = k -1

def bubblesort(List):
    for k in range(len(List)):
        bubble(List,k)
```

Analyse du tri à bulles

Théorème

Pour trier n nombres, le tri à bulle nécessite $O(n^2)$ opérations de base. Il existe une famille de listes L_n, chacune de longueur n, sur lesquelles le tri à bulles effectue $\Omega(n^2)$ opérations.

Le bon

Tri fusion

```
def mergesort(List):
    if len(List) < 2:
        return List
    else:
        m = len(List) / 2
        Left = mergesort(List[:m])
        Right = mergesort(List[m:])
        return merge(Left, Right)
```

Le bon

Procédure de fusion

```
def merge(Left,Right):
    List = []
    L, R = 0, 0

    while L<=len(Left)-1 and R <= len(Right)-1 :
        if Left[L] <= Right[R] :
            List.append(Left[L])
            L = L+1
        else :
            List.append(Right[R])
            R = R+1
    List += Left[L:]
    List += Right[R:]
    return List
```

Analyse du tri fusion

Théorème

Pour trier n nombres, le tri fusion nécessite $O(n \log n)$ opérations de base.

Théorème

Un algorithme qui n'obtient de l'information sur les nombres de l'entrée qu'en comparant deux nombres (modèle par comparaisons) nécessite $\Omega(n \log n)$ comparaisons pour trier une suite de n nombres.

Le truand

Code spaghetti

Algorithmes en temps polynômial

Définition (Algorithme en temps polynômial)

Un algorithme s'exécute en temps polynômial s'il existe une constante k telle que le nombre d'opérations de base que l'algorithme effectue est majoré par $O(n^k)$, où n est la longueur de l'entrée de l'algorithme.

Exemple

Le tri fusion et le tri à bulles sont des algorithmes en temps polynômial. Mais le tri fusion est meilleur en pire cas, et aussi en pratique.

Exercice de 5 minutes

L'algorithme suivant est-il en temps polynômial ?
Entrée : Entier naturel k en notation unaire
$s = 2$
Répéter k fois : $s = s^2$
Supposer que s est stocké en notation binaire !

L'algorithme du simplexe est-il en temps polynômial ?

Nombre d'opérations arithmétiques

- Chaque itération de l'algorithme du simplexe nécessite un nombre polynômial d'opérations arithmétiques.
- On peut montrer que si les nombres rationnels sont sans facteurs communs (c'est-à-dire que leurs numérateur et dénominateur sont premiers entre eux) pendant l'élimination de Gauss-Jordan, alors tous les nombres sont de longueur polynômiale durant les étapes intermédiaires de l'élimination de Gauss-Jordan.
- On ne sait pas s'il existe une variante de l'algorithme du simplexe qui n'effectue qu'un nombre polynômial (en n et m) d'opérations.

L'algorithme du simplexe est-il en temps polynômial ?

Taille de l'entrée

- Taille de l'entier a : $\lceil \log(|a| + 1) \rceil$
- Taille du nombre rationnel p/q avec $\gcd(p, q) = 1$: taille(p) + taille(q)
- Taille de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$: $m \cdot n \cdot$ taille(U), où U est un majorant des numérateurs et dénominateurs des entrées.
- Taille du vecteur $v \in \mathbb{Q}^n$: $n \cdot$ taille(U), où U est un majorant des numérateurs et dénominateurs des entrées.

Algorithme en temps polynômial pour la programmation linéaire

Théorème (Khachiyan 79)

Il existe un algorithme pour résoudre le programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leq b\}$$

qui effectue un nombre polynômial d'opérations arithmétiques sur des nombres rationnels de taille polynômiale. Polynômial signifie ici $O(n^k)$ pour une constante k, et n est un majorant des tailles de A, b et c.