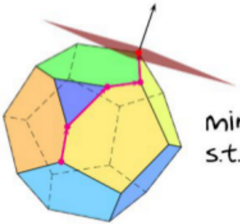


$\min c^T x$

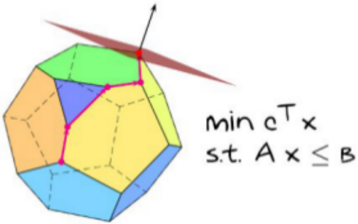
s.t. $Ax \leq B$

DISOPT.EPFL.CH

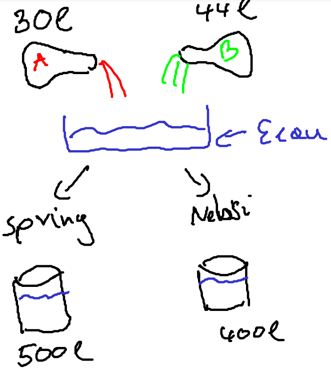
Suivez bien teaching

Programmation linéaire

- Exemple



Production de boissons minérales



100ℓ	A	B	Profit
Spring	3ℓ	8ℓ	100 CHF
Websi	6ℓ	4ℓ	125 CHF

Question: Comment a maximizer le profit ?

500ℓ Spring ne sont pas a produire;
et 400ℓ Websi

$3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39\,\ell$ (A)

Le problème d'optimisation

- Utilisation de A et B avec un profit pour $100l$:

	A	B	Profit
Spring	$3l$	$8l$	100 CHF
Nebsi	$6l$	$4l$	125 CHF

- En Stock:
  $30l$ de A et $44l$ de B
- Capacité des tonneaux:
  Spring $500l$, Nebsi $400l$

plan de production:

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad x_1 \cdot 100\ l$ Spring

$x_2 \cdot 100\ l$ Nebsi

E: $(5,4)$ plan qui est inadmissible

Fonction Objectif

$$\text{Max} \quad 100 \cdot x_1 + 125\, x_2$$

sous les conditions:

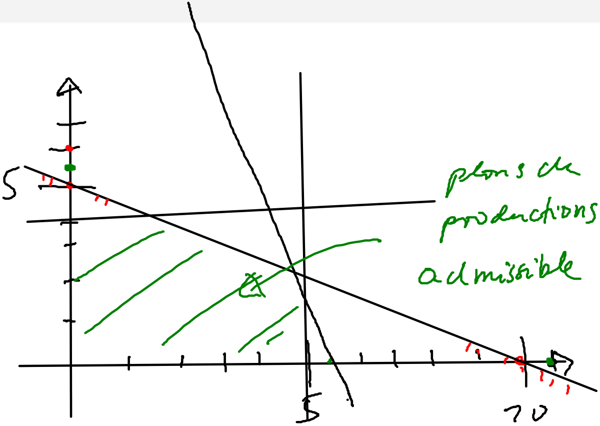
$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 30$$
$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 44$$
$$x_1 \leq 5$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

programme linéaire

PL

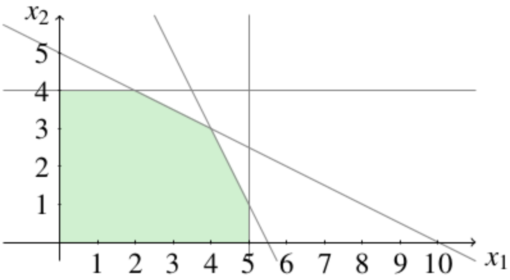
Plans de production faisables

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & 100 \cdot x_1 + 125 \cdot x_2 & & \\
\text{s.c.} & 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 & \leqslant & 30 \\
 & 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \leqslant & 44 \\
 & x_1 & \leqslant & 5 \\
 & x_2 & \leqslant & 4 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$



Une solution optimale

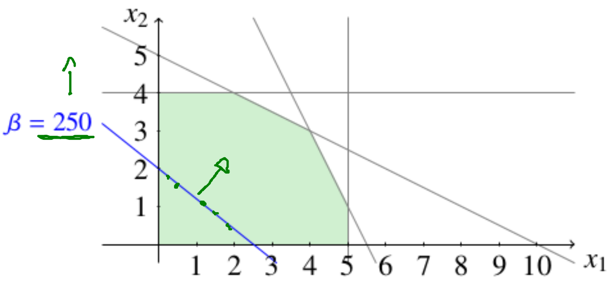
max $x_1 \cdot 100 + x_2 \cdot 125$



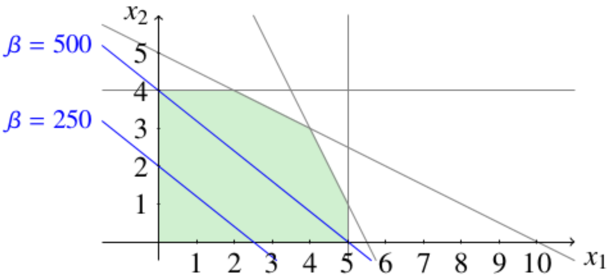
Une solution optimale

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 200 x_1 + 125 \cdot x_2 = \underline{250}\}$

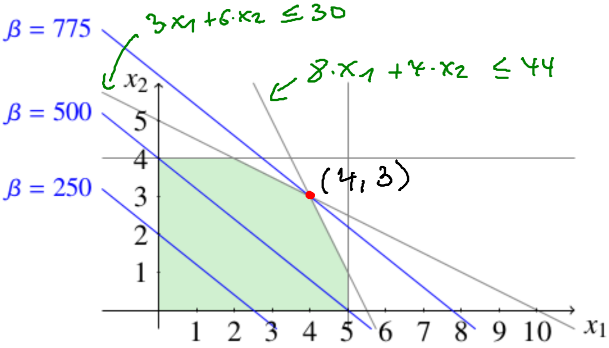
ligne.



Une solution optimale



Une solution optimale



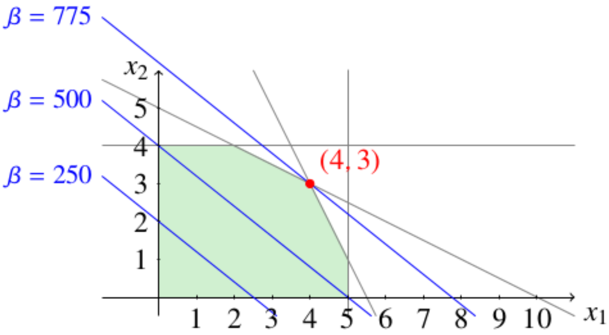
$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 = 30 \\ 8 \cdot x_1 + 4x_2 = 44 \end{cases}$$

Le plan de production optimal est de produire

400 l de Spring

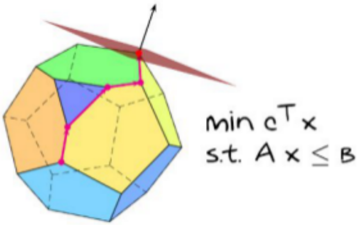
300 l de Nebsi

Une solution optimale

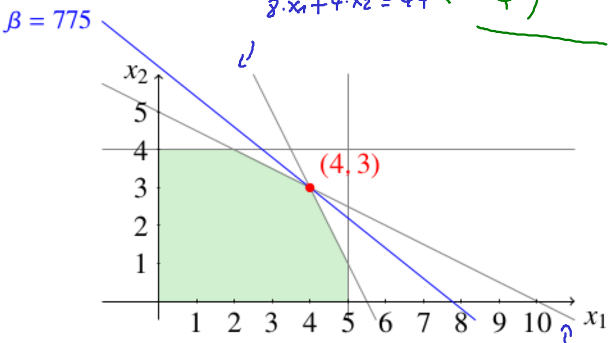


Leçon 1

Exemple: Certifier l'optimalité



Certifier l'optimalité



$8\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 44$ $\left(* \frac{25}{4}\right)$

F.O.

$100 x_1 + 125 \cdot x_2$

(I)
$$50\cdot x_1 + 100 x_2 \le 500$$
$$50 x_1 + 25 x_2 \le 275$$
+

$3 x_1 + 6\cdot x_2 \le 30$ $(* 50/3)$

tous les points admissible satisfaient les contraintes (I) et leurs sommes :

$$100 x_1 + 125 x_2 \le 775$$

$\Rightarrow$ Tous les points admissible ont valeur de la fonction objectif ≤ 775 $\Rightarrow$ (4,3) est optimal !

Quiz

$$\begin{array}{lrcl}
\text{maximiser} & 94 \cdot x_1 + 128 \cdot x_2 & & \\
\text{sous contraintes} & 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 & \leqslant & 30 \\
& 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \leqslant & 44 \\
& x_1 & \leqslant & 5 \\
& x_2 & \leqslant & 4 \\
& x_1 & \geqslant & 0 \\
& x_2 & \geqslant & 0
\end{array}$$

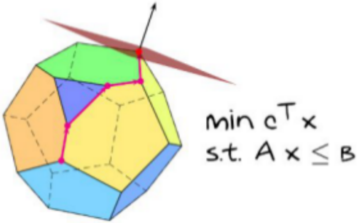
Profit de $(4, 3)$: $94 \cdot 4 + 128 \cdot 3 = 760$

Est $(4, 3)$ le plan de production optimal?

- Non, parce qu'il y a un plan de production faisable avec plus de profit.
- Oui, parce que les deux premières inégalités donnent une borne supérieure de 760 sur le profit de tous les plans de production faisables.
  Ceci peut être démontré en multipliant ces inégalités par 11 et 6 respectivement et en additionnant le résultat des inégalités.
- Oui,parce que les deux premières inégalités donnent une borne supérieure de 760 sur le profit de tous les plans de production faisables.
  Ceci peut être démontré en multipliant ces inégalités par 18 et 5 respectivement et en additionnant le résultat des inégalités.

Programmation linéaire

- Définition de la programmation linéaire
- Quelques notations utiles



Qu'est-ce qu'un programme linéaire?

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$

fonction linéaire.

Un programme linéaire est une fonction objectif linéaire

VARIABLES

$$\underline{c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n}$$

et des inégalités linéaires

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n \leqslant b_m. \end{array}$$

m inégalités linéaires.

Trouver $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ equi maximise la fonction objectif parmi tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ qui satisfont les inégalités linéaires.

Retour à l'exemple d'introduction

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{maximiser} & 100 \cdot x_1 + 125 \cdot x_2 & & \\
\text{sous contraintes} & 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 & \leqslant & 30 \\
 & 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \leqslant & 44 \\
 & x_1 & \leqslant & 5 \\
 & x_2 & \leqslant & 4 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

$\iff -x_1 \leq 0$

$\iff -x_2 \leq 0$

$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geq \beta \iff -a_1 x_1 + \cdots + -a_n x_n \leq -\beta$

Notation matricielle

$$\max \quad c^T \cdot x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
\text{s.c.} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \leqslant b_m .
\end{aligned}$$

$$\max\{c^T \cdot x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\}.$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Retour à l'exemple d'introduction

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{max} & 100 \cdot x_1 + 125 \cdot x_2 & & \\
\text{s. c.} & 3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 & \leqslant & 30 \\
 & 8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 & \leqslant & 44 \\
 & x_1 & \leqslant & 5 \\
 & x_2 & \leqslant & 4 \\
 & x_1 & \geqslant & 0 \\
 & x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

$\max \; c^T \cdot x$

$Ax \leq b$

$x \in \mathbb{R}^2$

$c = \begin{pmatrix} 100 \\ 125 \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 44 \\ 5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Max vs. Min

$\min\{5, 4, -3\} = -3$

$= -\max\{-5, -4, 3\} = -3$

$\min\{c^T x \,;\, Ax \le b,\ x \in \mathbb{R}^n\}$

$= -\max\{-c^T x \,;\, Ax \le b,\ x \in \mathbb{R}^n\}$

Quiz

Qu'est-ce que A, b et c dans la notation matricielle $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax \leqslant b\}$ du programme linéaire suivant:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{min} & 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 & & \\
\text{s.t.:} & 2 \cdot x_1 + x_2 & \geqslant & 2 \\
& x_1 + x_2 & \leqslant & 10 \\
& x_1 & \geqslant & 0 \\
& x_2 & \geqslant & 0
\end{array}
$$

$= - \quad \max \ -2x_1 - 3x_2$

$-2x_1 - x_2 \leq -2$

$x_1 + x_2 \leq 10$

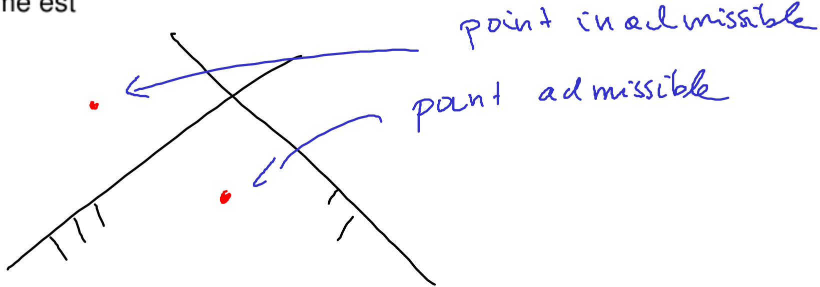
$-x_1 \leq 0$

$-x_2 \leq 0$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

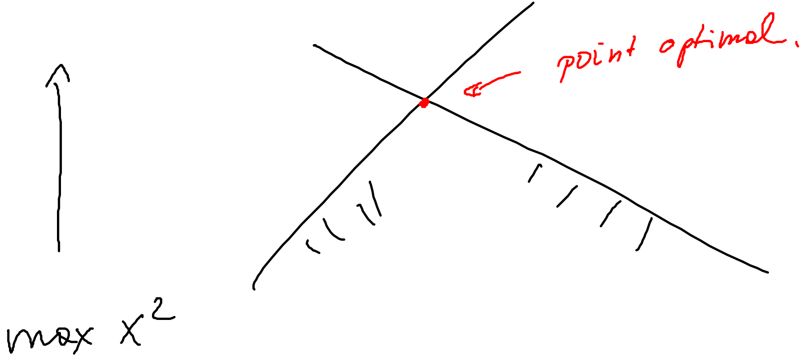
Solutions admissibles

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est appelé *admissible* (ou *faisable*), si x satisfait toutes les inégalités linéaires. S'il y a des solutions admissibles d'un programme linéaire, le programme linéaire lui-même est
admissible.



Solutions optimales

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ qui est admissible est une *solution optimale* du programme linéaire si $c^T x \geqslant c^T y$ pour tous les points $y \in \mathbb{R}^n$ qui sont admissibles.



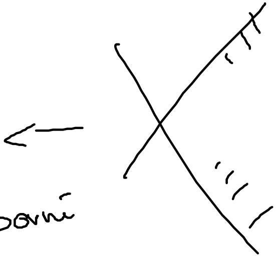
Programme linéaire

Un programme linéaire est *borné* si une constante $M \in \mathbb{R}$ existe telle que $c^T x \leqslant M$ pour tous les $x \in \mathbb{R}^n$ qui sont admissibles.

PL n'est pas borné
peut être inadmissible ?

$\boxed{\text{Non.}}$

$\max -x_1$



borné

$\max x_1 \longrightarrow$ Non-borné

Quiz

Le programme linéaire

$$\begin{array}{lll} \max & x_1 & \\ \text{s.t.:} & x_1 + x_2 & \leqslant 1 \\ & x_1 & \geqslant 1 \end{array}$$

- inadmissible
- est admissible
- est borné

Non

$(1,0)$ admissible

$\forall k \geq 1$: $(k, -k)$ est admissible

Donné une $M \in \mathbb{R}$

$k^* = \max\{M+1, 1\}$

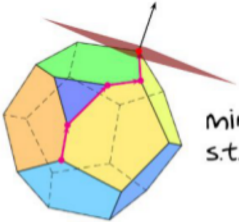
$(k^*, -k^*)$ est admissible

c.t. $k^* > M$

F.O.

Programmation linéaire

- Algèbre linéaire vs optimisation linéaire
- Régression linéaire
- Classification



$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } A x \leq B$$

Algèbre linéaire vs optimisation linéaire

Résoudre le système linéaire

Pour $A \in \mathbb{R}^{\overset{m\times n}{\cancel{mn}}}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, déterminer $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $Ax = b$ ou affirmer qu'un tel x n'existe pas.

- Elimination de Gauss-Jordan

$\max\ c^T. x$

$Ax \leq b$

$Ax = b$

$-Ax \leq -b$

$x \in \mathbb{R}^n$

Noyau et image

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Noyau : $\operatorname{Ker}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0 \}$

Image : $\operatorname{Im}(A) = \{ y \in \mathbb{R}^m : \exists\, x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = y \}$

Quiz

Soit $A \in \mathbb{R}^{\cancel{mn}\, m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^{m}$. Le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n,\ Ax = b\}$$

est admissible et non-borné si

- $b \in \ker(A)$ $\quad b \in \mathbb{R}^m \quad \ker(A) \subseteq \mathbb{R}^n$
- $b \in \operatorname{im}(A)$ nécessaire $\quad b \in \operatorname{im}(A) \Rightarrow \exists x^* \in \mathbb{R}^n$
- $b \in \operatorname{im}(A)$ et $c \in \ker(A) \setminus \{0\}$ $\Rightarrow$ non-borné

la réponse juste

$A \cdot x^* = b$,

$A \cdot c = 0 \Rightarrow \quad A(x^* + \lambda \cdot c) = b$

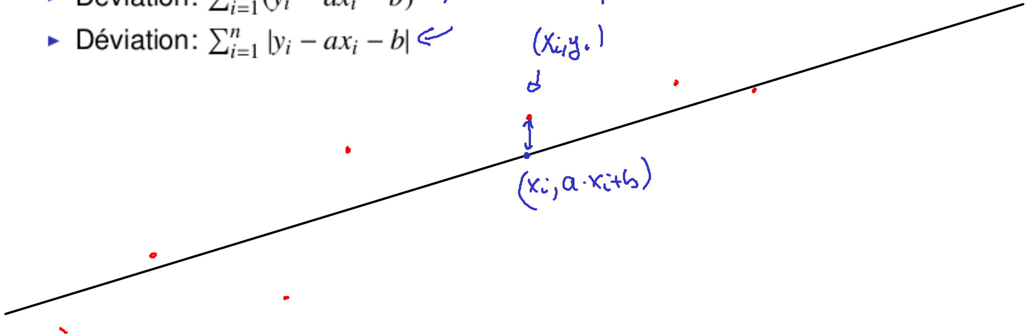
$\lambda \in \mathbb{R}$

$c^T \cdot (x^* + \lambda \cdot c)$

$= c^T \cdot x^* + \cancel{\lambda} \cdot \underbrace{c^T \cdot c}_{>0}$

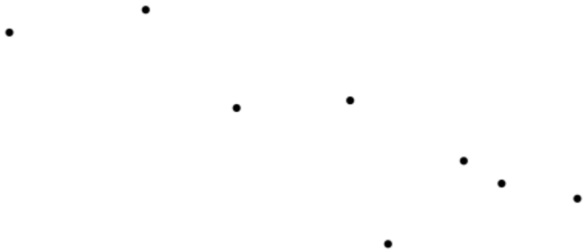
Régression linéaire

- Points donnés $(y_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ $i = 1, \ldots, n$
- Trouver une droite ajustée $y = ax + b$ de telle façon que $ax_i + b \approx y_i$
- Déviation: $\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$ ← Least squares method moindre carrée
- Déviation: $\sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$ ←



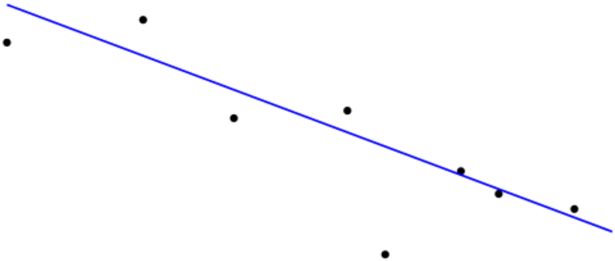
Régression linéaire

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$$



Régression linéaire

$$\begin{array}{c} \min \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b| \\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$



Régression linéaire

$$\min_{a, b \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|$$

L'astuce: Modéliser la valeur absolue $|y_i - ax_i - b|$ par une variable h_i qui satisfait

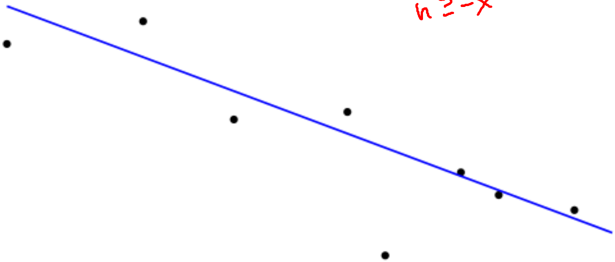
$$\begin{aligned} h_i &\geqslant y_i - ax_i - b \\ h_i &\geqslant -(y_i - ax_i - b) \end{aligned}$$

$X \in \mathbb{R}$

$|X|$ $\quad \min h$

$h \geq X$

$h \geq -X$



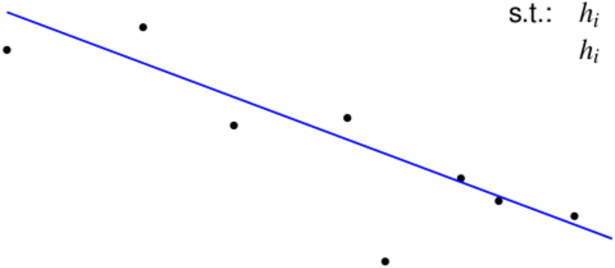
Régression linéaire

$$\min \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b| \quad a, b \in \mathbb{R}$$

L'astuce: Modéliser la valeur absolue $|y_i - ax_i - b|$ par une variable h_i qui satisfait

$$\boxed{\begin{aligned} h_i &\geqslant y_i - ax_i - b \\ h_i &\geqslant -(y_i - ax_i - b) \end{aligned}}$$

$$\begin{array}{lll} \min & & \sum_{i=1}^{n} h_i \\ \text{s.t.:} & h_i & \geqslant y_i - ax_i - b, \quad i = 1, \ldots, n \\ & h_i & \geqslant -y_i + ax_i + b, \quad i = 1, \ldots, n \end{array}$$

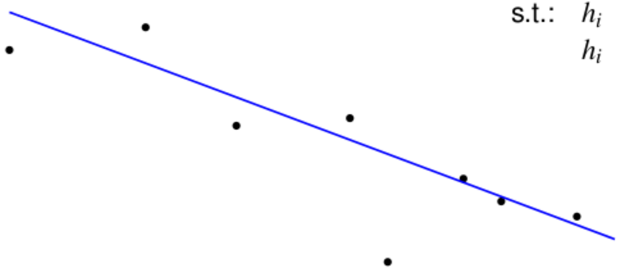


VARS: $h_1, \ldots, h_n, a, b$

Régression linéaire

L'astuce: Modéliser la valeur absolue $|y_i - ax_i - b|$ par une variable h_i qui satisfait

$$\begin{aligned} h_i &\geqslant y_i - ax_i - b \\ h_i &\geqslant -(y_i - ax_i - b) \end{aligned}$$



$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{i=1}^{n} h_i & \\ \text{s.t.:} & h_i \geqslant y_i - ax_i - b, & i = 1, \ldots, n \\ & h_i \geqslant -y_i + ax_i + b, & i = 1, \ldots, n \end{array}$$

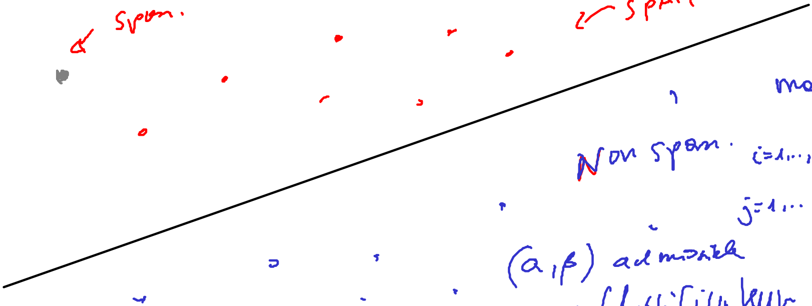
Classification

- Pour m points rouges $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^k$ et n points bleus $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^k$
- Trouver $a \in \mathbb{R}^k$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$a^T x_i > \beta, \quad i = 1, \ldots, m \quad \text{et} \quad a^T y_j < \beta, \quad j = 1, \ldots, n$$

spam. spam

$\{x \in \mathbb{R}^k : a^T . x = \beta\}$



$\max 0^T \begin{pmatrix} a \\ \beta \end{pmatrix}$

Non spam. $i = 1, \ldots, m : \; a^T . x_i \geq \beta + 1$

$j = 1, \ldots, n : \; a^T . y_j \leq \beta - 1$

(a, β) admissible $\quad a \in \mathbb{R}^k, \beta \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Classificateur

Le PL est admissible si et seulement s'il existe un classificateur.

Hyperlan: $a^T . x = \beta$

"$\Rightarrow$" ($\vee$)

"$\Leftarrow$"

a, β est un classificateur. alors. $\exists\ \varepsilon > 0$

$i = 1, \dots, m \quad a^T \cdot x_i \geq \beta + \varepsilon \quad | * \frac{1}{\varepsilon}$

$j = 1, \dots, n \quad a^T \cdot y_j \leq \beta - \varepsilon \quad | * \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{a^T}{\varepsilon} \cdot x_i \geq \frac{\beta}{\varepsilon} + 1$

$\frac{a^T}{\varepsilon} \cdot y_j \leq \frac{\beta}{\varepsilon} - 1$

alors $\left(\frac{a}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\varepsilon}\right)$ est admissible.

$\boxed{}$

Classification

Classification

Classification